



# Оператор Штурма-Лиувилля

Самарова С.С.

ФОПФ, 3 курс, УМФ

Учебное пособие для дистанционных занятий

Данное пособие посвящено методам решения типовых задач, связанных со свойствами оператора Штурма-Лиувилля.

## Определение оператора Штурма-Лиувилля

Оператором Штурма-Лиувилля называют линейный дифференциальный оператор

$$A : D(A) \rightarrow L_2[a, b],$$

имеющий вид

$$(Af)(x) = -\left(p(x)f'(x)\right)' + q(x)f(x), \quad x \in [a, b], \quad f \in D(A),$$

где

$$D(A) = \{f \in W^{2,2}[a, b] : \alpha_1 f(a) - \alpha_2 f'(a) = 0, \quad \beta_1 f(b) + \beta_2 f'(b) = 0\}$$

причем числа  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  неотрицательны и

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0.$$

**Замечание 1.** В классическом определении оператора Штурма-Лиувилля на функции  $p(x)$  и  $q(x)$  накладываются следующие ограничения:

- $p(x) \in C^1[a, b]$  и  $p(x) > 0$  для  $\forall x \in [a, b]$ ;

- $q(x) \in C[a, b]$  и  $q(x) \geq 0$  для  $\forall x \in [a, b]$ .

### Задача Штурма-Лиувилля

Задачу поиска собственных значений и собственных функций оператора Штурма-Лиувилля

$$(Af)(x) = \lambda f(x), \quad x \in [a, b], \quad f \in D(A)$$

называют **задачей Штурма-Лиувилля**.

### Интегральное ядро оператора Штурма-Лиувилля

**Утверждение 1.** Если  $\lambda = 0$  не является собственным значением оператора Штурма-Лиувилля  $A$ , то для любой функции  $g \in L_2[a, b]$  решение уравнения

$$Af(x) = g(x)$$

можно представить в виде

$$f(x) = \int_a^b G(x, t)g(t)dt, \quad g \in L_2[a, b], \quad x \in [a, b].$$

Функцию  $G(x, t)$  называют **интегральным ядром (разрешающим ядром) оператора Штурма-Лиувилля**.

По своему смыслу интегральный оператор

$$(Lg)(x) = \int_a^b G(x, t)g(t)dt, \quad g \in L_2[a, b], \quad x \in [a, b].$$

представляет собой оператор, обратный к оператору Штурма-Лиувилля, то есть

$$Lg = A^{-1}g$$

**Замечание 2.** Напомним, что линейный оператор  $B$  имеет обратный  $\Leftrightarrow \text{Ker} B = \{0\} \Leftrightarrow \lambda = 0$  не является собственным значением оператора  $B$ .

## Построение интегрального ядра оператора Штурма-Лиувилля

Рассмотрим оператор Штурма-Лиувилля  $A$ , у которого  $\lambda = 0$  не является собственным значением, и построим его интегральное ядро по следующей схеме:

1. Найдем  $f_1(x)$  - ненулевое решение однородного уравнения

$$(Af)(x) = 0,$$

удовлетворяющее **только краевому условию на левом конце отрезка  $[a, b]$** :

$$\alpha_1 f(a) - \alpha_2 f'(a) = 0$$

2. Найдем  $f_2(x)$  - ненулевое решение однородного уравнения

$$(Af)(x) = 0,$$

удовлетворяющее **только краевому условию на правом конце отрезка  $[a, b]$** :

$$\beta_1 f(b) + \beta_2 f'(b) = 0$$

3. Вычислим  $W(x)$  - определитель Вронского для  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix}$$

и найдем

$$p(x)W(x)$$

4. Выпишем интегральное ядро оператора Штурма-Лиувилля в виде

$$G(x, t) = -\frac{1}{p(x)W(x)} \begin{cases} f_1(x) \cdot f_2(t), & a \leq x \leq t \leq b, \\ f_2(x) \cdot f_1(t), & a \leq t \leq x \leq b. \end{cases}$$

**Замечание 3.** Из того, что  $\lambda = 0$  не является собственным значением оператора  $A$ , следует, что определитель Вронского

$$W(x) \neq 0 \quad \text{для} \quad \forall x \in [a, b]$$

Для доказательства замечания 3 воспользуемся методом «от противного».

Пусть  $\exists x_0 \in [a, b]$  такое, что  $W(x_0) = 0$ . Тогда, поскольку  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  – решения уравнения  $(Af)(x) = 0$ , то

$$W(x) \equiv 0 \quad \text{для} \quad \forall x \in [a, b].$$

В частности,  $W(b) = 0$ . Следовательно, существует число  $k$  такое, что

$$\begin{cases} f_1(b) = k f_2(b), \\ f_1'(b) = k f_2'(b). \end{cases}$$

Но тогда решение  $f_1(x)$  будет удовлетворять также и краевому условию в точке  $b$ , то есть будет собственной функцией оператора  $A$  с  $\lambda = 0$ .

Противоречие.

**Замечание 4.**

$$p(x)W(x) = \text{const} \quad \text{для} \quad \forall x \in [a, b]$$

Для доказательства запишем уравнение

$$(Af)(x) = -\left(p(x)f'(x)\right)' + q(x)f(x) = 0$$

в виде

$$-p(x)f''(x) - p'(x)f'(x) + q(x)f(x) = 0$$

По формуле Лиувилля

$$W(x) = C e^{-\int \frac{p'(x)}{p(x)} dx} = C_1 e^{-\ln p(x)} = \frac{C_1}{p(x)}$$

Следовательно,

$$p(x)W(x) = C_1,$$

что и требовалось доказать.

**Замечание 5.** При решении задач [проводить отдельную проверку того, что  \$\lambda = 0\$  не является собственным значением оператора  \$A\$ , не нужно.](#)

Докажем, что в случае, когда  $\lambda = 0$  является собственным значением оператора  $A$ , интегральное ядро оператора Штурма-Лиувилля построить не удастся.

Действительно, пусть  $z(x)$  – собственная функция оператора  $A$  с собственным значением  $\lambda = 0$ .

Тогда  $(Af)(x) = 0$  и определитель Вронского для функций  $z(x)$  и  $f_1(x)$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} z(x) & f_1(x) \\ z'(x) & f_1'(x) \end{vmatrix}$$

обращается в нуль при  $x = a$ .

Значит, существует число  $k_1$  такое, что  $f_1(x) = k_1 z(x)$  для  $\forall x \in [a, b]$ .

Точно так же доказываем, что существует число  $k_2$  такое, что  $f_2(x) = k_2 z(x)$  для  $\forall x \in [a, b]$ .

Следовательно, решения  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  линейно зависимы, их определитель Вронского  $W(x) \equiv 0$  и интегральное ядро оператора Штурма-Лиувилля построить невозможно.

Доказательство завершено.

### Сведение задачи Штурма-Лиувилля к интегральному уравнению

Если  $\lambda = 0$  не является собственным значением оператора Штурма-Лиувилля  $A$ , то решение задачи Штурма-Лиувилля

$$(Af)(x) = \lambda f(x), \quad x \in [a, b], \quad f \in D(A),$$

эквивалентно решению интегрального уравнения

$$f(x) = \lambda \int_a^b G(x, t) f(t) dt, \quad f \in L_2[a, b]$$

### Примеры решения задач

**Задача 1** Пусть оператор Штурма-Лиувилля

$$A : D(A) \rightarrow L_2 \left[ \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right]$$

имеет вид

$$(Af)(x) = -\sin^2 x \cdot f''(x) - \sin 2x \cdot f'(x), \quad x \in \left[ \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right], \quad f \in D(A),$$

где

$$D(A) = \left\{ f \in W^{2,2} \left[ \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right] : f' \left( \frac{\pi}{3} \right) = 0, \quad f \left( \frac{\pi}{2} \right) + f' \left( \frac{\pi}{2} \right) = 0 \right\}$$

Доказать, что существует обратный оператор

$$A^{-1} : L_2 \left[ \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow D(A)$$

и для любой функции  $g \in L_2 \left[ \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right]$  вычислить функцию  $A^{-1}g \in D(A)$ .

**Решение.** Сначала преобразуем оператор  $A$  к стандартному виду

$$(Af)(x) = -\sin^2 x \cdot f''(x) - \sin 2x \cdot f'(x) = -\left(\sin^2 x \cdot f'(x)\right)'$$

Построим интегральное ядро оператора  $A$ .

1. Решим уравнение  $(Af)(x) = 0$ :

$$-\left(\sin^2 x \cdot f'(x)\right)' = 0$$

$$\sin^2 x \cdot f'(x) = C_1$$

$$f'(x) = \frac{C_1}{\sin^2 x}$$

$$f(x) = C_1 \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -C_1 \operatorname{ctg} x + C_2$$

2. Найдем  $f_1(x)$ :

$$f_1' \left( \frac{\pi}{3} \right) = 0 \Rightarrow \frac{4C_1}{3} = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow f_1(x) \equiv 1$$

3. Найдем  $f_2(x)$ :

$$f_2 \left( \frac{\pi}{2} \right) + f_2' \left( \frac{\pi}{2} \right) = 0 \Rightarrow C_2 + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2$$

$$\Rightarrow f_2(x) = \operatorname{ctg} x + 1$$

4. Найдем определитель Вронского:

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & \operatorname{ctg} x + 1 \\ 0 & -\frac{1}{\sin^2 x} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Тогда

$$p(x)W(x) = \sin^2 x \cdot \frac{(-1)}{\sin^2 x} = -1$$

5. Выпишем интегральное ядро оператора Штурма-Лиувилля:

$$G(x, t) = -\frac{1}{(-1)} \begin{cases} \operatorname{ctg} t + 1, & 0 \leq x \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{ctg} x + 1, & 0 \leq t \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases} = \begin{cases} \operatorname{ctg} t + 1, & 0 \leq x \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{ctg} x + 1, & 0 \leq t \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Поскольку определитель Вронского  $W(x) \neq 0$  для всех  $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ , то  $\lambda = 0$  не является собственным значением оператора  $A$ .

Значит,  $\operatorname{Ker} A = \{0\}$  и у оператора  $A$  есть обратный оператор  $A^{-1}$ .

Докажем, что обратный оператор  $A^{-1}$  определяется формулой

$$(A^{-1}g)(x) = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} G(x, t)g(t)dt, \quad g \in L_2\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right], \quad x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Для этого рассмотрим сначала произвольную функцию  $g \in C\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$  и обозначим

$$f(x) = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} G(x, t)g(t)dt$$

Тогда

$$f(x) = (\operatorname{ctg} x + 1) \int_{\frac{\pi}{3}}^x g(t)dt + \int_x^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{ctg} t + 1)g(t)dt \quad (1)$$

Из свойств интегралов с переменными верхним и нижним пределами и непрерывности функции  $g$  получаем, что функция  $f$  дифференцируема на  $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Продифференцируем равенство (1).

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= -\frac{1}{\sin^2 x} \int_{\frac{\pi}{3}}^x g(t) dt + (\operatorname{ctg} x + 1)g(x) - (\operatorname{ctg} x + 1)g(x) = \\
 &= -\frac{1}{\sin^2 x} \int_{\frac{\pi}{3}}^x g(t) dt
 \end{aligned} \tag{2}$$

Следовательно,

$$\sin^2 x f'(x) = - \int_{\frac{\pi}{3}}^x g(t) dt \tag{3}$$

В правой части равенства (3) подынтегральная функция непрерывна, значит, это равенство можно продифференцировать:

$$(\sin^2 x f'(x))' = -g(x)$$

Таким образом, мы получили, что для любой непрерывной функции  $g(x)$

$$(Af)(x) = -(\sin^2 x \cdot f'(x))' = g(x)$$

Проверим выполнение краевых условий. Используя равенства (1) и (2), получаем:

$$\begin{aligned}
 f'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= 0 \\
 f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} g(t) dt - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} g(t) dt = 0
 \end{aligned}$$

Значит,

$$f(x) = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} G(x, t)g(t) dt = (A^{-1}g)(x) \tag{4}$$

Докажем теперь, что для всех функций  $g \in L_2 \left[ \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right]$  обратный оператор  $(A^{-1}g)$  определяется формулой (4).

Для этого вспомним, что множество непрерывных на отрезке  $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$  функций является всюду плотным в  $L_2\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ , поэтому для любой функции  $g \in L_2\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$  существует последовательность  $\{g_n(x)\}$  таких, что

- $g_n(x) \in C\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$  для всех  $n$ ;
- $g_n \rightarrow g$  при  $n \rightarrow \infty$  в пространстве  $L_2\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Поскольку функции  $g_n(x)$  непрерывны, то по формуле (4) находим

$$f_n(x) = (A^{-1}g_n)(x) = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} G(x, t)g_n(t)dt \quad (5)$$

Из непрерывности интегрального оператора (5) следует, что в пространстве  $L_2\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$f_n(x) \rightarrow f(x) = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} G(x, t)g(t)dt$$

при  $n \rightarrow \infty$ .

Проверим теперь, что  $f(x) \in D(A)$ . Сначала докажем, что у  $f(x)$  есть две обобщенные производные.

Подставляя функции  $f_n(x)$  и  $g_n(x)$  в равенство (2), получаем

$$f'_n(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} \int_{\frac{\pi}{3}}^x g_n(t)dt \quad (6)$$

Из непрерывности интегрального оператора (6) следует, что в пространстве  $L_2 \left[ \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right]$

$$f'_n(x) \rightarrow u(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} \int_{\frac{\pi}{3}}^x g(t) dt$$

при  $n \rightarrow \infty$ .

Используя формулу для оператора Штурма-Лиувилля, получаем

$$g_n(x) = (Af_n)(x) = -\sin^2 x \cdot f''_n(x) - \sin 2x \cdot f'_n(x)$$

$$f''_n(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} \left( g_n(x) + \sin 2x \cdot f'_n(x) \right)$$

$$f''_n(x) \rightarrow v(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} \left( g(x) + \sin 2x \cdot u(x) \right)$$

при  $n \rightarrow \infty$ .

Поскольку функции  $f_n(x) \in C^2 \left[ \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right]$ , то их обычные производные первого и второго порядков являются обобщенными производными. Поэтому для любой финитной в  $\left[ \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right]$  функции  $h(x)$  имеем

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f'_n(x) h(x) dx = - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) h'(x) dx \quad (7)$$

и

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f''_n(x) h(x) dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) h''(x) dx \quad (8)$$

Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$  в формулах (7) и (8), получаем

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} u(x) h(x) dx = - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) h'(x) dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} v(x)h(x)dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)h''(x)dx$$

Таким образом, обобщенной производной  $f'$  функции  $f$  является функция  $u$  и справедлива формула

$$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} \int_{\frac{\pi}{3}}^x g(t)dt$$

что и обеспечивает выполнение краевых условий.

Решение задачи 1 закончено.

Для решения задачи 2 нам понадобится следующее утверждение, являющееся лекционным материалом.

**Утверждение 2.** Пусть  $\mathcal{H}$  – гильбертово пространство. Линейный оператор  $L : D(L) \rightarrow \mathcal{H}$  плотно определен, взаимно однозначен и самосопряжен. Тогда  $\text{Im}L$  всюду плотно в  $\mathcal{H}$ , а обратный оператор  $L^{-1} : \text{Im}L \rightarrow \mathcal{H}$  является самосопряженным.

**Задача 2 (Задание, задача 2.4 а))** Пусть оператор

$$A : D(A) \rightarrow L_2[0, 1]$$

с областью определения

$$D(A) = \{f \in W^{2,2}[0, 1] : f(0) = 0, \quad f'(1) + f(1) = 0\}$$

имеет вид

$$(Af)(x) = f''(x), \quad x \in [0, 1], \quad f \in D(A),$$

1. Доказать, что оператор  $A$  является самосопряженным.
2. Найти все его собственные числа и собственные функции.
3. Доказать, что собственные функции оператора  $A$  образуют в  $L_2[0, 1]$  ортогональный базис.
4. Выписать формулу для спектрального разложения оператора  $A$ .

## Решение.

### 1. Самосопряженность оператора $A$ .

Заметим, что оператор  $(-A)$  является оператором Штурма-Лиувилля, и найдем для него обратный оператор  $(-A^{-1})$ .

Для этого построим интегральное ядро оператора  $(-A)$ .

(a) Решим уравнение  $(-Af)(x) = 0$ :

$$f''(x) = 0$$

$$f(x) = C_1x + C_2$$

(b) Найдем  $f_1(x)$ :

$$f_1(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow f_1(x) = x$$

(c) Найдем  $f_2(x)$ :

$$\begin{aligned} f_2'(1) + f_2(1) = 0 &\Rightarrow C_1 + C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -2C_1 \\ &\Rightarrow f_2(x) = x - 2 \end{aligned}$$

(d) Найдем определитель Вронского:

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x - 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x - (x - 2) = 2$$

Тогда

$$p(x)W(x) = 1 \cdot 2 = 2$$

(e) Выпишем интегральное ядро оператора  $(-A)$ :

$$G(x, t) = -\frac{1}{2} \begin{cases} x(t - 2), & 0 \leq x \leq t \leq 1, \\ t(x - 2), & 0 \leq t \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Поскольку определитель Вронского  $W(x) \neq 0$  для всех  $x \in [0, 1]$ , то  $\lambda = 0$  не является собственным значением оператора  $(-A)$ .

Отсюда следует, что  $\text{Ker}(-A) = \{0\}$  и у оператора  $(-A)$  есть обратный оператор  $(-A^{-1})$ , который определяется формулой

$$(-A^{-1}g)(x) = - \int_0^1 G(x,t)g(t)dt, \quad g \in L_2[0,1], \quad x \in [0,1].$$

Поскольку функция  $G(x,t) \in L_2([0,1] \times [0,1])$  и  $G(x,t) = \overline{G(t,x)}$  для всех  $x \in [0,1]$  и  $t \in [0,1]$ , то из свойств интегрального оператора следует, что оператор  $(-A^{-1})$  является самосопряженным.

Таким образом, оператор  $A^{-1}$  определен на всем  $L_2[0,1]$ , взаимно однозначен и самосопряжен. Воспользовавшись утверждением 2, получаем, что оператор  $A$  самосопряжен.

## 2. Собственные числа и собственные функции оператора $A$ .

Поскольку оператор  $A$  самосопряжен и взаимно однозначен, то его собственные значения действительны и отличны от нуля.

Возможны два случая.

- $\lambda > 0$

В этом случае, решая уравнение

$$f'' = \lambda f, \quad f(0) = 0, \quad f'(1) + f(1) = 0,$$

получим

$$f(x) = c_1 \text{sh}(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \text{ch}(\sqrt{\lambda} x)$$

$$f(0) = c_2 = 0$$

$$f'(1) + f(1) = c_1 \sqrt{\lambda} \text{ch}(\sqrt{\lambda}) + c_1 \text{sh}(\sqrt{\lambda}) = 0$$

Поскольку нас интересует случай  $c_1 \neq 0$ , то

$$\sqrt{\lambda} \text{ch}(\sqrt{\lambda}) + \text{sh}(\sqrt{\lambda}) = 0$$

$$\text{th}(\sqrt{\lambda}) = -\sqrt{\lambda}$$

Обозначим

$$\mu = \sqrt{\lambda}$$

Тогда

$$\operatorname{th} \mu = -\mu, \quad \mu > 0 \quad (9)$$

Нарисуем графики левой и правой частей уравнения (9)

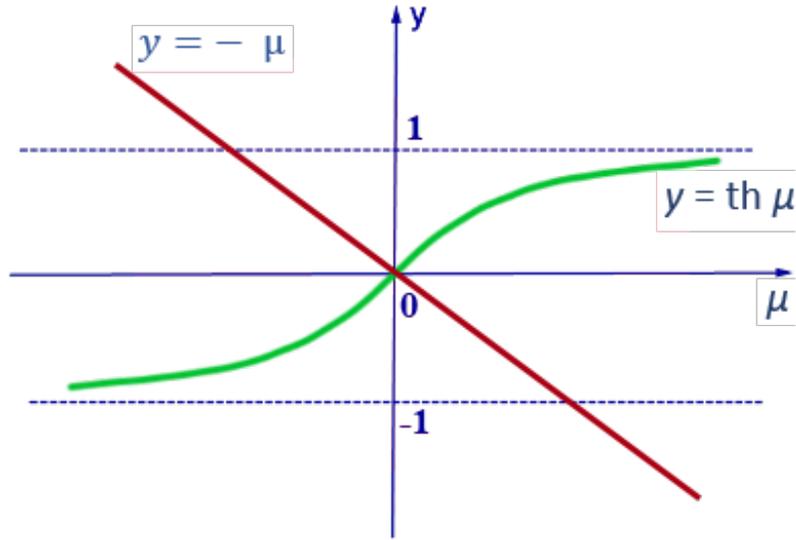


Рис.1

Как видно из графиков, уравнение (9) не имеет положительных корней. Значит, у оператора  $A$  нет положительных собственных значений.

- $\lambda < 0$

В этом случае, решая уравнение

$$f'' = \lambda f, \quad f(0) = 0, \quad f'(1) + f(1) = 0,$$

получим

$$f(x) = c_1 \sin(\sqrt{-\lambda} x) + c_2 \cos(\sqrt{-\lambda} x)$$

$$f(0) = c_2 = 0$$

$$f'(1) + f(1) = c_1 \sqrt{-\lambda} \cos(\sqrt{-\lambda}) + c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}) = 0$$

Поскольку нас интересует случай  $c_1 \neq 0$ , то

$$\sqrt{-\lambda} \cos(\sqrt{-\lambda}) + \sin(\sqrt{-\lambda}) = 0$$

$$\operatorname{tg}(\sqrt{-\lambda}) = -\sqrt{-\lambda}$$

Обозначим

$$\mu = \sqrt{-\lambda}$$

Тогда

$$\operatorname{tg} \mu = -\mu, \quad \mu > 0 \quad (10)$$

Нарисуем графики левой и правой частей уравнения (10)

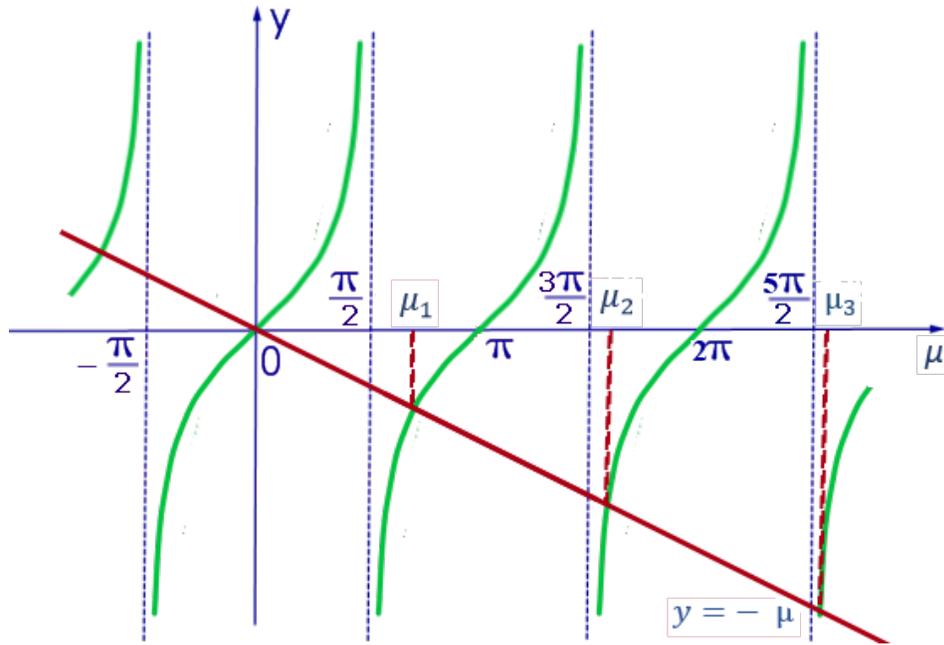


Рис.2

Как видно из графиков, уравнение (10) имеет счетное множество положительных корней

$$\mu_1 < \mu_2 < \dots, \quad \mu_k \in \left( -\frac{\pi}{2} + \pi k, \pi k \right), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Таким образом, у оператора  $A$  есть счетное множество отрицательных собственных значений и соответствующих этим собственным значениям собственных функций:

$$\lambda_k = -\mu_k^2, \quad f_k = \sin(\mu_k x), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

- Докажем, что собственные функции оператора  $A$  образуют в  $L_2[0, 1]$  ортогональный базис.

Для этого заметим, что собственные функции оператора  $A$

$$f_k = \sin(\mu_k x) \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

с собственными значениями

$$\lambda_k = -\mu_k^2$$

являются также и собственными функциями оператора  $A^{-1}$ , но только с собственными значениями

$$\frac{1}{\lambda_k} = -\frac{1}{\mu_k^2}$$

Действительно,

$$Af_k = \lambda_k f_k \iff f_k = A^{-1} Af_k = \lambda_k A^{-1} f_k \iff A^{-1} f_k = \frac{1}{\lambda_k} f_k$$

По теореме Гильберта-Шмидта у компактного самосопряженного оператора  $A^{-1}$  существует ортогональный базис из собственных функций в  $(\text{Ker} A^{-1})^\perp$ . Поскольку  $\text{Ker} A^{-1} = \{0\}$ , то собственные функции

$$f_1, f_2, \dots$$

будут образовывать ортогональный базис во всем пространстве  $L_2[0, 1]$ .

Доказано.

- Выпишем формулу для спектрального разложения оператора  $A$

$$Af = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \frac{(f, f_k)}{(f_k, f_k)} f_k.$$

Решение задачи 2 закончено.

На этом мы заканчиваем решение задач, связанных с операторами Штурма-Лиувилля.

Спасибо за внимание.  
Не болейте!

