Регулярные ветви многозначных функций (часть 3)

Самарова С.С.

ФОПФ, 3 курс, ТФКП

Учебное пособие для дистанционных занятий

В данном пособии продолжается изучение методов решения задач, в которых используются регулярные ветви многозначных функций $\mathrm{Ln} f(z)$ и $\sqrt[n]{f(z)}$, где $f(z)$ – голоморфная функция. В качестве примеров приводятся решения задач на вычисление интегралов от действительных функций по конечному интервалу действительной оси.

Вычисление несобственных интегралов по конечному интервалу действительной оси

Решим задачу из семестровой контрольной работы по ТФКП 2019/2020 учебного года.

Задача 1 *Применяя теорию вычетов, вычислите интеграл*

$$\int\limits_{-2}^{1} \frac{x\sqrt[3]{(x+2)^2(1-x)}}{(x-2)^2}\,dx$$

Решение. Для вычисления интеграла

$$I = \int\limits_{-2}^{1} \frac{x\sqrt[3]{(x+2)^2(1-x)}}{(x-2)^2}\,dx$$

построим контур

$$\gamma = I^+ \,\cup\, C_{\varepsilon_1} \,\cup\, I^- \,\cup\, C_{\varepsilon_2}\,,$$

изображенный на рисунке 1.

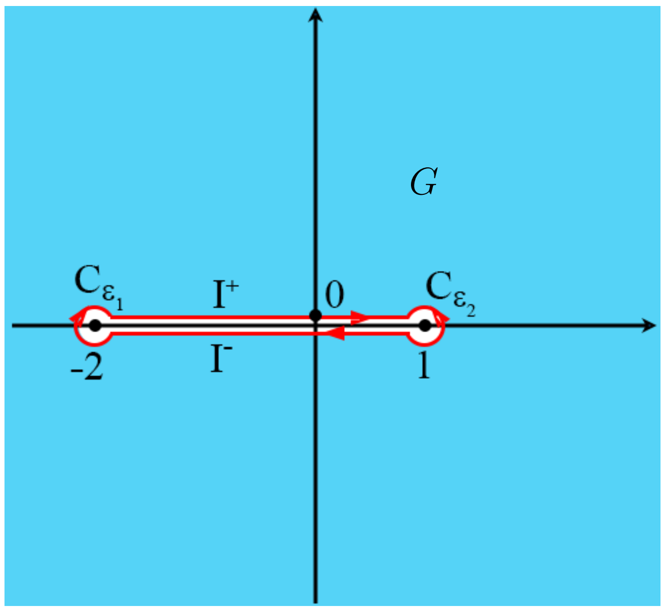

Рис. 1

Голубой заливкой на рисунке отмечена область G, ограниченная контуром γ.

Рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{z\,h(z)}{(z-2)^2}$$

где через $h(z)$ обозначена регулярная ветвь многозначной функции $\sqrt[3]{(z+2)^2(1-z)}$, определяемая условием $h(0) = \sqrt[3]{4}$.

Следует отметить, что этот контур, получивший из-за своего вида название «гантелька», ограничивает область, содержащую ∞. Внутри «гантели» выделить регулярную ветвь функции $\sqrt[3]{(z+2)^2(1-z)}$ невозможно.

Поскольку внутри области G у функции $f(z)$ имеются две особые точки: $z = 2$ и $z = \infty$, то по теореме Коши о вычетах

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \left(\operatorname*{res}_{z=2} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) \right) \tag{1}$$

Вычислим эти вычеты.

Точка $z = 2$ является полюсом 2-го порядка, поэтому

$$\operatorname*{res}_{z=2} f(z) = \operatorname*{res}_{z=2} (z\, h(z))' = \Big(h(z) + z\, h'(z) \Big)\Big|_{z=2} =$$

$$= h(2) + \left. \frac{z\, h(z) \Big(2(z+2)(1-z) - (z+2)^2 \Big)}{3(z+2)^2(1-z)} \right|_{z=2} =$$

$$= h(2) + \left. \frac{z\, h(z) \Big(2(1-z) - (z+2) \Big)}{3(z+2)(1-z)} \right|_{z=2} = h(2) + \frac{2h(2)(-6)}{-12} = 2h(2) \tag{2}$$

Найдем значение $h(2)$. Для этого рассмотрим рисунок 2

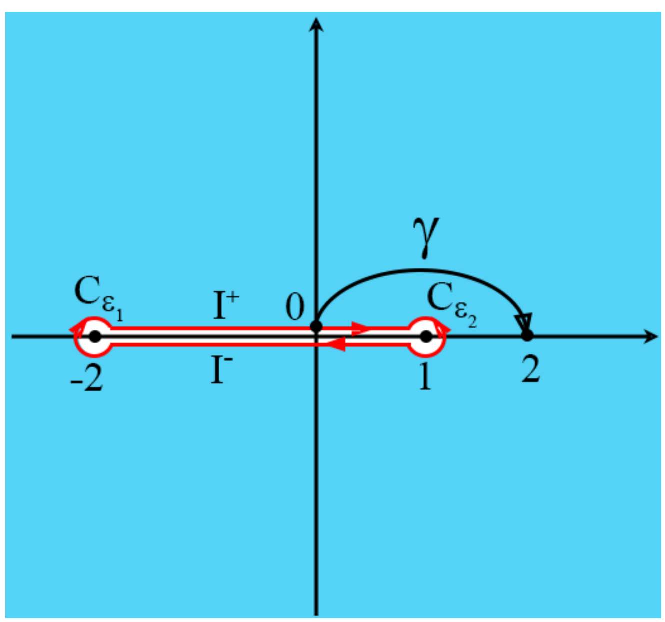

Рис. 2

и воспользуемся формулой (5) из материала занятия «Регулярные ветви многозначных функций (часть 1)»

$$h(2) = h(0) \cdot \sqrt[3]{\frac{|-16|}{|4|}} \cdot e^{\frac{i}{3}\,\left(2\Delta_\gamma \arg(z+2) + \Delta_\gamma \arg(z-1)\right)} =$$

$$= \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot e^{\frac{i}{3}\,\left(0 + (-\pi)\right)} = \sqrt[3]{16} \cdot e^{-\frac{i\pi}{3}}$$

Подставляя это значение в формулу (2), получаем

$$\operatorname*{res}_{z=2} f(z) = 2h(2) = 4\sqrt[3]{2} \cdot e^{-\frac{i\pi}{3}}$$

Теперь вычислим вычет в точке $z = \infty$. Для этого разложим функцию в ряд Лорана по степеням z в окрестности точки $z = \infty$. Поскольку ряды Лорана всех ветвей корня отличаются множителем, то сразу включим в формулу множитель C, а его значение уточним потом:

$$f(z) = \frac{z\,h(z)}{(z-2)^2} = C \cdot \frac{1}{z} \cdot \left(1 - \frac{2}{z}\right)^{-2} z \cdot \left(1 + \frac{2}{z}\right)^{\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{3}} =$$

$$= C\,\left(1 + \frac{4}{z} + o\!\left(\frac{1}{z}\right)\right)\,\left(1 + \frac{4}{3z} + o\!\left(\frac{1}{z}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{3z} + o\!\left(\frac{1}{z}\right)\right) =$$

$$= C\,\left(1 + \frac{5}{z} + o\!\left(\frac{1}{z}\right)\right)$$

Для того, чтобы найти константу C, заметим, что

$$C = \lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

где x - число на интервале $(1, +\infty)$ действительной оси. Поэтому

$$C = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\,h(x)}{(x-2)^2}$$

Вычислим значение $h(x)$. Для этого рассмотрим рисунок 3

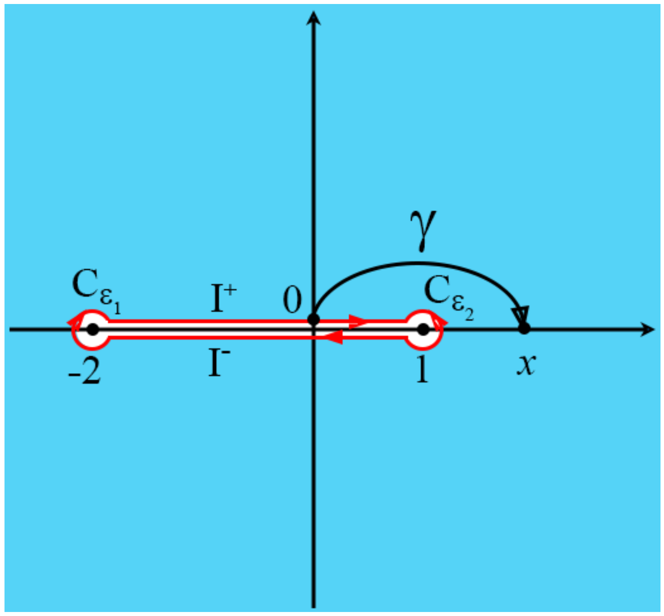

Рис. 3

и снова воспользуемся формулой (5) из материала занятия «Регулярные ветви многозначных функций (часть 1)»

$$h(x) = h(0) \cdot \sqrt[3]{\frac{\left|(x+2)^2(1-x)\right|}{|4|}} \cdot e^{\frac{i}{3}\,\left(2\Delta_\gamma \arg(z+2) + \Delta_\gamma \arg(z-1)\right)} =$$

$$= \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{\frac{(x+2)^2(x-1)}{4}} \cdot e^{\frac{i}{3}\,\left(0 + (-\pi)\right)} = \sqrt[3]{(x+2)^2(x-1)} \cdot e^{-\frac{i\pi}{3}}$$

Таким образом,

$$C = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\,h(x)}{(x-2)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\,\sqrt[3]{(x+2)^2(x-1)} \cdot e^{-\frac{i\pi}{3}}}{(x-2)^2} = e^{-\frac{i\pi}{3}}$$

функция

$$f(z) = C\left(1 + \frac{5}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right)\right) = e^{-\frac{i\pi}{3}}\left(1 + \frac{5}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right)\right)$$

а требуемый вычет

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = -5\, e^{-\frac{i\pi}{3}}$$

Теперь, воспользовавшись формулой (1), вычисляем интеграл

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \left(4\sqrt[3]{2} \cdot e^{-\frac{i\pi}{3}} - 5\, e^{-\frac{i\pi}{3}} \right) = 2\pi i \left(4\sqrt[3]{2} - 5 \right) e^{-\frac{i\pi}{3}} \qquad (3)$$

С другой стороны, этот интеграл представляется в виде суммы четырех интегралов

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{I^+} f(z)dz + \int\limits_{C_{\varepsilon_1}} f(z)dz + \int\limits_{I^-} f(z)dz + \int\limits_{C_{\varepsilon_2}} f(z)dz$$

Рассмотрим каждый из четырех интегралов.

1. $$\int\limits_{I^+} f(z)dz = \int\limits_{-2+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \frac{x\sqrt[3]{(x+2)^2(1-x)}}{(x-2)^2}\, dx \ \to I \qquad (\varepsilon_1 \to 0,\ \varepsilon_2 \to 0)$$

2. Выразим интеграл по нижнему берегу разреза

$$\int\limits_{I^-} f(z)dz$$

через интеграл по верхнему берегу. Для этого найдем значение регулярной ветви $h(z)$ в точке x на нижнем берегу разреза с помощью рисунка 4.

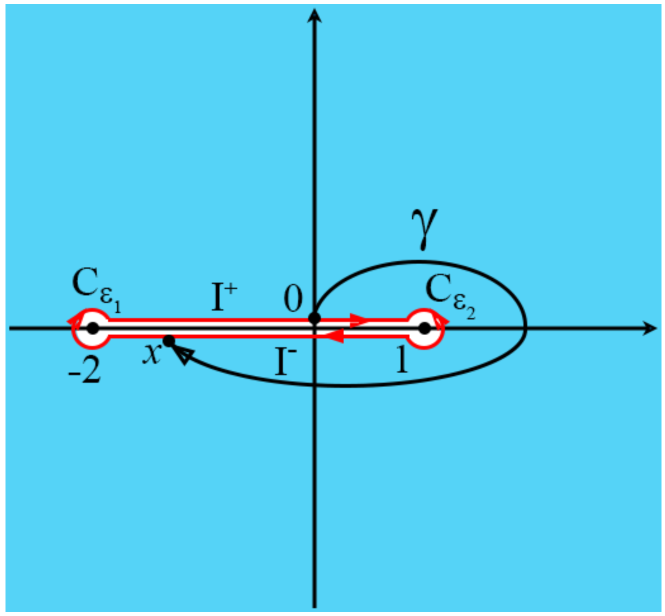

Рис. 4

$$h(x) = h(0) \cdot \sqrt[3]{\frac{\left|(x+2)^2(1-x)\right|}{|4|}} \cdot e^{\frac{i}{3}\left(2\Delta_\gamma \arg(z+2) + \Delta_\gamma \arg(z-1)\right)} =$$

$$= \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{\frac{(x+2)^2(1-x)}{4}} \cdot e^{\frac{i}{3}\left(0+(-2\pi)\right)} = \sqrt[3]{(x+2)^2(1-x)} \cdot e^{-\frac{2i\pi}{3}}$$

Следовательно,

$$\int\limits_{I^-} f(z)dz = -\int\limits_{-2+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \frac{x\, h(x)}{(x-2)^2}\, dx = -\int\limits_{-2+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \frac{x\, \sqrt[3]{(x+2)^2(1-x)} \cdot e^{-\frac{2i\pi}{3}}}{(x-2)^2}\, dx =$$

$$= -e^{-\frac{2i\pi}{3}} \int\limits_{-2+\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_2} \frac{x\, \sqrt[3]{(x+2)^2(1-x)}}{(x-2)^2}\, dx \quad \to \quad -e^{-\frac{2i\pi}{3}} \cdot I \quad (\varepsilon_1 \to 0,\ \varepsilon_2 \to 0)$$

3. Покажем, что

$$\int\limits_{C_{\varepsilon_1}} f(z)dz \quad \to \quad 0 \qquad (\varepsilon_1 \to 0)$$

Действительно,

$$\left|\int\limits_{C_{\varepsilon_1}} f(z)dz\right| \leqslant \max_{C_{\varepsilon_1}} |f(z)| \cdot 2\pi\varepsilon_1 \leqslant \frac{\varepsilon_1 \sqrt[3]{(\varepsilon_1+2)^2(1+\varepsilon_1)}\, 2\pi\varepsilon_1}{(2-\varepsilon_1)^2} \ \to \ 0 \quad (\varepsilon_1 \to 0)$$

4. Покажем, что

$$\int\limits_{C_{\varepsilon_2}} f(z)dz \quad \to \quad 0 \qquad (\varepsilon_2 \to 0)$$

В точности так же, как и предыдущем пункте,

$$\left|\int\limits_{C_{\varepsilon_2}} f(z)dz\right| \leqslant \max_{C_{\varepsilon_2}} |f(z)| \cdot 2\pi\varepsilon_2 \leqslant \frac{\varepsilon_2 \sqrt[3]{(\varepsilon_2+2)^2(1+\varepsilon_2)}\, 2\pi\varepsilon_2}{(2-\varepsilon_2)^2} \ \to \ 0 \quad (\varepsilon_2 \to 0)$$

Таким образом,

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)dz \quad \to \quad I - e^{-\frac{2i\pi}{3}} \cdot I = \left(1 - e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right) I \qquad (\varepsilon_1 \to 0,\ \varepsilon_2 \to 0)$$

Следовательно, переходя к пределу при $\varepsilon_1 \to 0,\ \varepsilon_2 \to 0$ в формуле (3), получаем

$$\left(1 - e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right) I = 2\pi i \left(4\sqrt[3]{2} - 5\right) e^{-\frac{i\pi}{3}}$$

Остается умножить это равенство на $e^{\frac{i\pi}{3}}$

$$\left(e^{\frac{i\pi}{3}} - e^{-\frac{i\pi}{3}}\right) I = 2\pi i \left(4\sqrt[3]{2} - 5\right)$$

$$2i \sin\frac{\pi}{3}\, I = 2\pi i \left(4\sqrt[3]{2} - 5\right)$$

$$I = \pi \, \frac{4\sqrt[3]{2}-5}{\sin\frac{\pi}{3}} = 2\pi \, \frac{4\sqrt[3]{2}-5}{\sqrt{3}}$$

Ответ.

$$I = 2\pi \, \frac{4\sqrt[3]{2}-5}{\sqrt{3}}$$

Следующая задача из семестровой контрольной работы 2018/2019 года предлагается Вам для самостоятельного решения.

Задача 2 *Применяя теорию вычетов, вычислите интеграл*

$$\int\limits_{-3}^{0} \frac{(x-1)dx}{(x-2)\sqrt[5]{(x+3)x^4}}$$

Ответ.

$$I = \frac{\pi}{\sin\frac{4\pi}{5}} \, \left(1 - \frac{1}{\sqrt[5]{80}}\right)$$

Спасибо за внимание.
Не болейте!