Регулярные ветви многозначных функций (часть 2)

Самарова С.С.

ФОПФ, 3 курс, ТФКП

Учебное пособие для дистанционных занятий

В данном пособии мы продолжаем изучение методов решения задач, в которых используются регулярные ветви многозначных функций $\mathrm{Ln} f(z)$ и $\sqrt[n]{f(z)}$, где $f(z)$ – голоморфная функция. В качестве примеров приводятся решения задач на вычисление интегралов от действительных функций по бесконечному интервалу действительной оси.

Вычисление несобственных интегралов по бесконечному интервалу действительной оси

В качестве примера решим задачу из семестровой контрольной работы по ТФКП 2020/2021 учебного года.

Задача 1 *Применяя теорию вычетов, вычислите интеграл*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x-1}{\sqrt[n]{x}\,(x^2+1)}\,dx$$

для всех натуральных $n > 1$.

Решение. Для вычисления интеграла

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x-1}{\sqrt[n]{x}\,(x^2+1)}\,dx$$

рассмотрим контур

$$\gamma = I^+_{\varepsilon,R} \,\cup\, C_R \,\cup\, I^-_{\varepsilon,R} \,\cup\, C_\varepsilon\,,$$

изображенный на рисунке 1.

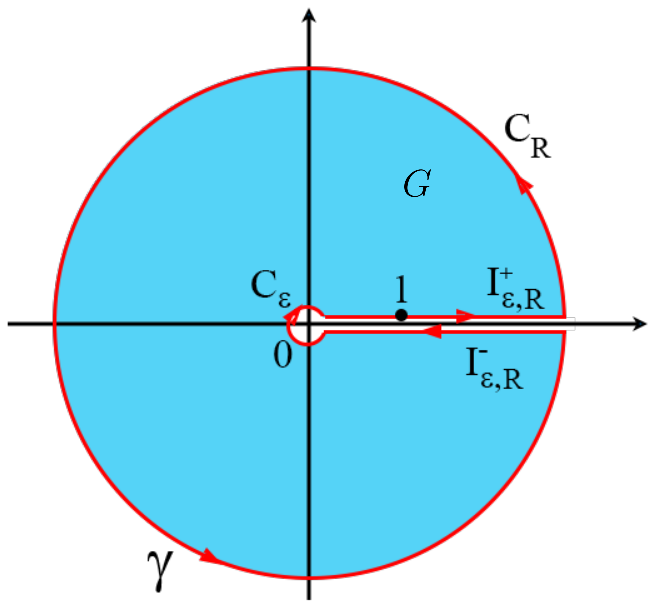

Рис. 1

Голубой заливкой на рисунке отмечена область G, ограниченная контуром γ.

Рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{z-1}{h(z)\,(z^2+1)}$$

где через $h(z)$ обозначена регулярная ветвь многозначной функции $\sqrt[n]{z}$, определяемая условием $h(1) = 1$.

Внутри области G у функции $f(z)$ имеются две особые точки: $z = i$ и $z = -i$, которые являются полюсами первого порядка.

По теореме Коши о вычетах

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \left(\operatorname*{res}_{z=i} f(z) + \operatorname*{res}_{z=-i} f(z) \right) \tag{1}$$

Вычислим эти вычеты.

$$\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = \operatorname*{res}_{z=i} \frac{z-1}{h(z)\,(z-i)(z+i)} = \frac{i-1}{2i\,h(i)} \tag{2}$$

Найдем значение $h(i)$. Для этого рассмотрим рисунок 2

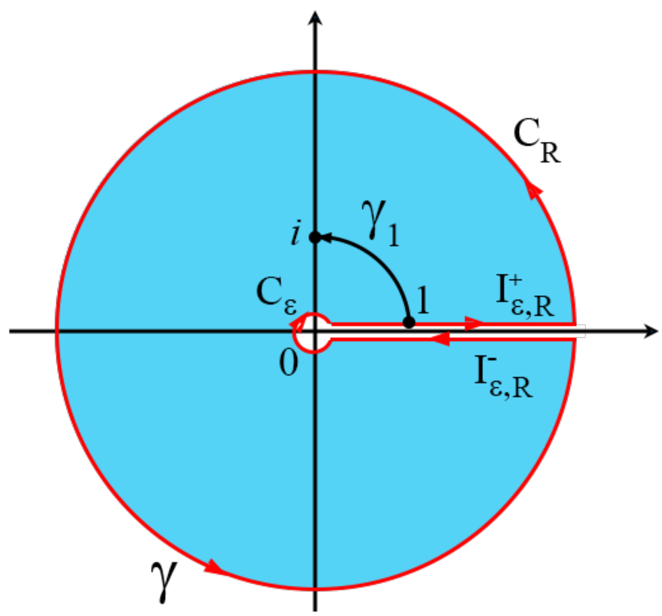

Рис. 2

и воспользуемся формулой из материала предыдущего занятия

$$h(i) = h(1) \cdot \sqrt[n]{\frac{|i|}{|1|}} \cdot e^{\frac{i}{n}\,\Delta_{\gamma_1} \arg z} = e^{\frac{i\pi}{2n}}$$

Подставляя это значение в формулу (2), получаем

$$\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = \frac{i-1}{2i\,h(i)} = \frac{i-1}{2i\,e^{\frac{i\pi}{2n}}} = \frac{1+i}{2}\,e^{-\frac{i\pi}{2n}}$$

Вычислим второй вычет

$$\operatorname*{res}_{z=-i} f(z) = \operatorname*{res}_{z=-i} \frac{z-1}{h(z)\,(z-i)(z+i)} = \frac{-i-1}{-2i\,h(-i)} \tag{3}$$

Осталось найти значение $h(-i)$. Для этого рассмотрим рисунок 3

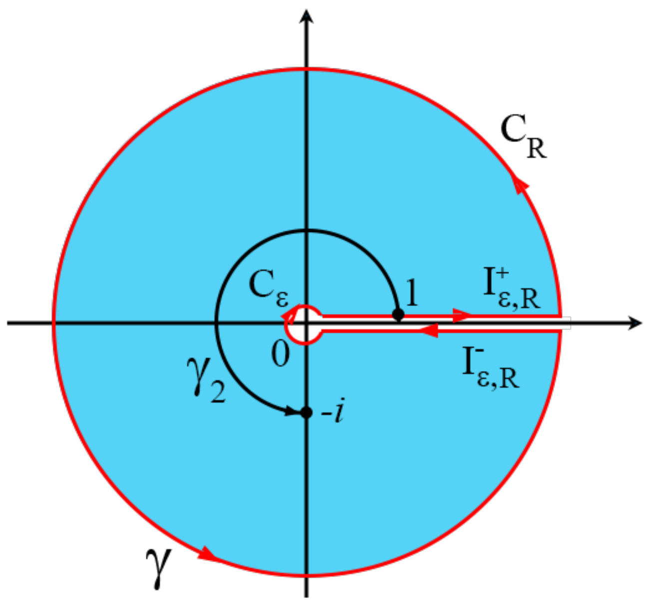

Рис. 3

и снова воспользуемся формулой, изученной на прошлом занятии

$$h(-i) = h(1) \cdot \sqrt[n]{\frac{|-i|}{|1|}} \cdot e^{\frac{i}{n}\,\Delta_{\gamma_2} \arg z} = e^{\frac{i3\pi}{2n}}$$

Подставляя это значение в формулу (3), находим вычет

$$\operatorname*{res}_{z=-i} f(z) = \frac{i+1}{2i\,h(-i)} = \frac{i+1}{2i\,e^{\frac{i3\pi}{2n}}} = \frac{1-i}{2}\,e^{-\frac{i3\pi}{2n}}$$

Теперь, воспользовавшись формулой (1), вычисляем интеграл

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i\left(\frac{1+i}{2}\,e^{-\frac{i\pi}{2n}} + \frac{1-i}{2}\,e^{-\frac{i3\pi}{2n}}\right) =$$

$$= \pi\left((i-1)\,e^{-\frac{i\pi}{2n}} + (i+1)\,e^{-\frac{i3\pi}{2n}}\right) \tag{4}$$

С другой стороны,

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{I^+_{\varepsilon,R}} f(z)dz + \int\limits_{C_R} f(z)dz + \int\limits_{I^-_{\varepsilon,R}} f(z)dz + \int\limits_{C_\varepsilon} f(z)dz$$

Рассмотрим каждый из четырех интегралов.

1. $$\int\limits_{I^+_{\varepsilon,R}} f(z)dz = \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{x-1}{\sqrt[n]{x}\,(x^2+1)}\,dx \;\to I \qquad (R\to\infty,\ \varepsilon\to 0)$$

2. Выразим интеграл по нижнему берегу разреза

$$\int\limits_{I^-_{\varepsilon,R}} f(z)dz$$

через интеграл по верхнему берегу. Для этого найдем значение регулярной ветви $h(z)$ в точке x на нижнем берегу разреза с помощью рисунка 4.

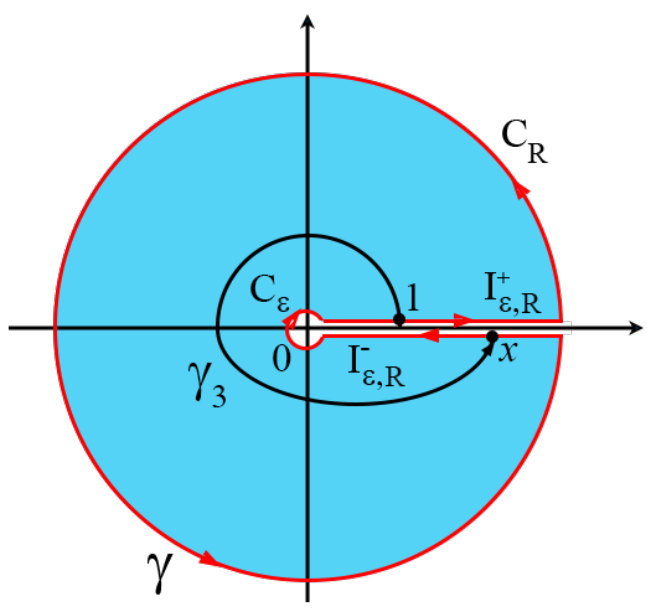

Рис. 4

$$h(x) = h(1)\cdot\sqrt[n]{\frac{|x|}{|1|}}\cdot e^{\frac{i}{n}\,\Delta_{\gamma_3}\arg z} = \sqrt[n]{x}\,e^{\frac{i2\pi}{n}}$$

Следовательно,

$$\int\limits_{I^-_{\varepsilon,R}} f(z)dz = -\int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{x-1}{h(x)\,(x^2+1)}\,dx = -\int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{x-1}{\sqrt[n]{x}\; e^{\frac{i2\pi}{n}}\;(x^2+1)}\,dx =$$

$$= -e^{-\frac{i2\pi}{n}} \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{x-1}{\sqrt[n]{x}\,(x^2+1)}\,dx \quad \to \quad -e^{-\frac{i2\pi}{n}} \cdot I \qquad (R\to\infty,\ \varepsilon\to 0)$$

3. Покажем, что

$$\int\limits_{C_R} f(z)dz \quad \to \quad 0 \qquad (R\to\infty)$$

Действительно,

$$\left|\int\limits_{C_R} f(z)dz\right| \leqslant \max_{C_R}|f(z)|\cdot 2\pi R \leqslant \frac{(R+1)2\pi R}{\sqrt[n]{R}\,(R^2-1)} \quad \to \quad 0 \qquad (R\to\infty)$$

4. Покажем, что

$$\int\limits_{C_\varepsilon} f(z)dz \quad \to \quad 0 \qquad (\varepsilon\to 0)$$

Действительно,

$$\left|\int\limits_{C_\varepsilon} f(z)dz\right| \leqslant \max_{C_\varepsilon}|f(z)|\cdot 2\pi\varepsilon \leqslant \frac{(\varepsilon+1)2\pi\varepsilon}{\sqrt[n]{\varepsilon}\,(1-\varepsilon^2)} \quad \to \quad 0 \qquad (\varepsilon\to 0)$$

Таким образом,

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)dz \quad \to \quad I - e^{-\frac{i2\pi}{n}}\cdot I = \left(1 - e^{-\frac{i2\pi}{n}}\right) I \qquad (R\to\infty,\ \varepsilon\to 0)$$

Следовательно, переходя к пределу при $R \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ в формуле (4), получаем

$$\left(1 - e^{-\frac{i2\pi}{n}}\right) I = \pi \left((i-1)\, e^{-\frac{i\pi}{2n}} + (i+1)\, e^{-\frac{i3\pi}{2n}}\right)$$

Остается умножить это равенство на $e^{\frac{i\pi}{n}}$

$$\left(e^{\frac{i\pi}{n}} - e^{-\frac{i\pi}{n}}\right) I = \pi \left((i-1)\, e^{\frac{i\pi}{2n}} + (i+1)\, e^{-\frac{i\pi}{2n}}\right)$$

$$2i \sin\frac{\pi}{n}\, I = \pi \left(2i\cos\frac{\pi}{2n} - 2i\sin\frac{\pi}{2n}\right)$$

$$I = \pi \left(\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{n}} - \frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{n}}\right) = \pi \left(\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{2n}} - \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{2n}}\right)$$

Ответ.

$$I = \pi \left(\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{2n}} - \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{2n}}\right)$$

Следующая задача из семестровой контрольной работы 2019/2020 года предлагается Вам для самостоятельного решения.

Задача 2 *Применяя теорию вычетов, вычислите интеграл*

$$\int\limits_2^{+\infty} \frac{\ln(x-2)\, dx}{x^2\sqrt{x-2}}\, dx$$

Ответ.

$$I = \frac{\pi(\ln 2 - 2)}{4\sqrt{2}}$$

Разберем еще одну задачу из семестровой контрольной работы 2020/2021 года

Задача 3 *Применяя теорию вычетов, вычислите интеграл*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x\, dx}{(x+\alpha)^2}\, dx \qquad \alpha > 0$$

Решение. Для вычисления интеграла

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x \; dx}{(x+\alpha)^2} \, dx$$

рассмотрим такой же контур, как и в задаче 1,

$$\gamma = I^+_{\varepsilon,R} \cup C_R \cup I^-_{\epsilon,R} \cup C_\varepsilon$$

Этот контур изображен на рисунке 5,

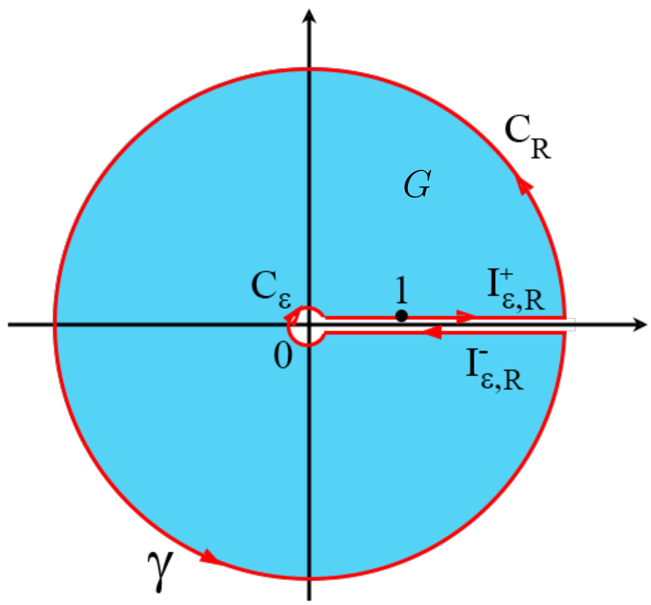

Рис. 5

голубой заливкой отмечена область G, ограниченная контуром γ.

Однако в отличие от задачи 1 при решении этой задачи используется искусственный прием, состоящий в том, что для вычисления интеграла

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x \; dx}{(x+\alpha)^2} \, dx$$

вводится функция

$$f(z) = \frac{h^2(z)}{(z+\alpha)^2}$$

где через $h(z)$ обозначена регулярная ветвь многозначной функции $\mathrm{Ln} z$, определяемая условием $h(1) = 0$.

Внутри области G у функции $f(z)$ имеется одна особая точка: $z = -\alpha$, которая является полюсом второго порядка.

По теореме Коши о вычетах

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=-\alpha} f(z) \tag{5}$$

Вычислим этот вычет

$$\operatorname*{res}_{z=-\alpha} f(z) = \operatorname*{res}_{z=-\alpha} \frac{h^2(z)}{(z+\alpha)^2} = \left(h^2(z)\right)'\Big|_{z=-\alpha} = 2h(-\alpha)h'(-\alpha) = \frac{2h(-\alpha)}{-\alpha} \tag{6}$$

Найдем значение $h(-\alpha)$. Для этого рассмотрим рисунок 6

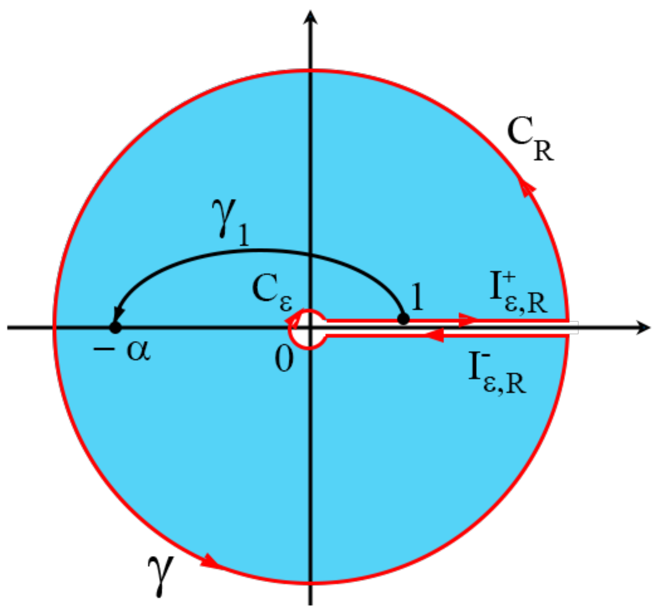

Рис. 6

и воспользуемся формулой из материала предыдущего занятия

$$h(-\alpha) = h(1) + \ln\frac{|-\alpha|}{|1|} + i\Delta_{\gamma_1}\arg z = \ln\alpha + i\pi$$

Подставляя это значение в формулу (6), получаем

$$\operatorname*{res}_{z=-\alpha} f(z) = \frac{2h(-\alpha)}{-\alpha} = -\frac{2(\ln\alpha + i\pi)}{\alpha}$$

Теперь, воспользовавшись формулой (5), вычисляем интеграл

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = -2\pi i\,\frac{2(\ln\alpha + i\pi)}{\alpha} = -\frac{4\pi i(\ln\alpha + i\pi)}{\alpha} \tag{7}$$

С другой стороны,

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = \int_{I^+_{\varepsilon,R}} f(z)dz + \int_{C_R} f(z)dz + \int_{I^-_{\varepsilon,R}} f(z)dz + \int_{C_\varepsilon} f(z)dz$$

Рассмотрим каждый из четырех интегралов.

1. $$\int_{I^+_{\varepsilon,R}} f(z)dz = \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\ln^2 x}{(x+\alpha)^2}\,dx \quad \to \quad \int_{0}^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{(x+\alpha)^2}\,dx \quad (R\to\infty,\ \varepsilon\to 0)$$

2. Выразим интеграл по нижнему берегу разреза

$$\int_{I^-_{\varepsilon,R}} f(z)dz$$

через интеграл по верхнему берегу. Для этого найдем значение регулярной ветви $h(z)$ в точке x на нижнем берегу разреза (рис.7.)

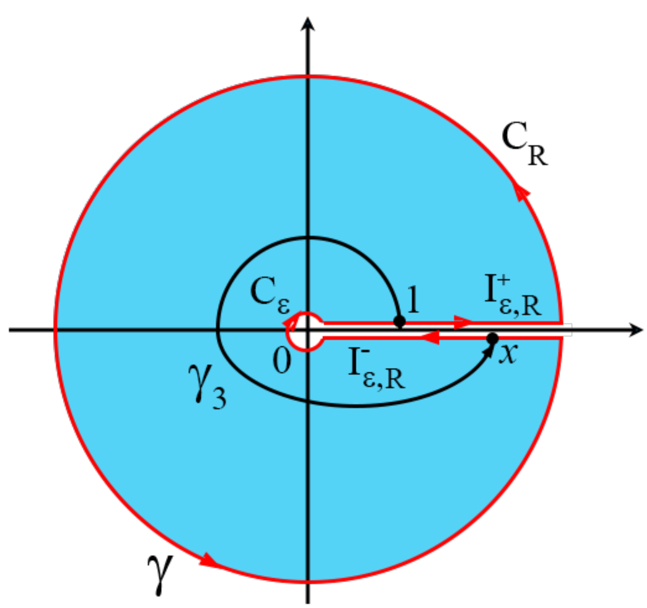

Рис. 7

$$h(x) = h(1) + \ln\frac{|x|}{|1|} + i\Delta_{\gamma_3}\arg z = \ln x + 2\pi i$$

Следовательно,

$$\int\limits_{I^-_{\varepsilon,R}} f(z)dz = -\int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{h^2(x)}{(x+\alpha)^2}\,dx =$$

$$= -\int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{(\ln x + 2\pi i)^2}{(x+\alpha)^2}\,dx \quad \to \quad -\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{(\ln x + 2\pi i)^2}{(x+\alpha)^2}\,dx \qquad (R\to\infty,\ \varepsilon\to 0)$$

3. Покажем, что

$$\int\limits_{C_R} f(z)dz \quad \to \quad 0 \qquad (R\to\infty)$$

Действительно,

$$\left|\int\limits_{C_R} f(z)dz\right| \leqslant \max_{C_R}|f(z)|\cdot 2\pi R \leqslant \frac{(\ln R + 2\pi)^2\ 2\pi R}{(R-\alpha)^2} \quad \to \quad 0 \qquad (R\to\infty)$$

4. Покажем, что

$$\int\limits_{C_\varepsilon} f(z)dz \quad \to \quad 0 \qquad (\varepsilon\to 0)$$

Действительно,

$$\left|\int\limits_{C_\varepsilon} f(z)dz\right| \leqslant \max_{C_\varepsilon}|f(z)|\cdot 2\pi\varepsilon \leqslant \frac{(-\ln\varepsilon + 2\pi)\ 2\pi\varepsilon}{(\alpha-\varepsilon)^2} \quad \to \quad 0 \qquad (\varepsilon\to 0)$$

Таким образом,

$$\oint\limits_{\gamma} f(z)dz \quad \to \quad \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{(x+\alpha)^2}\,dx - \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{(\ln x + 2\pi i)^2}{(x+\alpha)^2}\,dx =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x - \ln^2 x - 4\pi i \ln x - 4\pi^2}{(x+\alpha)^2}\, dx =$$

$$= -4\pi i \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+\alpha)^2}\, dx - 4\pi^2 \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{(x+\alpha)^2}\, dx \qquad (R \to \infty,\ \varepsilon \to 0)$$

Следовательно, переходя к пределу при $R \to \infty,\ \varepsilon \to 0$ в формуле (7), получаем

$$-4\pi i \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+\alpha)^2}\, dx - 4\pi^2 \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{(x+\alpha)^2}\, dx = -\frac{4\pi i \ln \alpha}{\alpha} + \frac{4\pi^2}{\alpha}$$

Приравнивая мнимые части выражений, стоящих в правой и левой частях равенства, находим

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+\alpha)^2}\, dx = \frac{\ln \alpha}{\alpha}$$

Ответ. $\dfrac{\ln \alpha}{\alpha}$

Спасибо за внимание.
Не болейте!