Регулярные ветви многозначных функций (часть 1)

Самарова С.С.

ФОПФ, 3 курс, ТФКП

Учебное пособие для дистанционных занятий

В пособии рассматриваются методы решения задач, в которых используются регулярные ветви многозначных функций $\operatorname{Ln} f(z)$ и $\sqrt[n]{f(z)}$, где $f(z)$ – голоморфная функция. В качестве примеров приводятся решения задач на разложение регулярных ветвей многозначных функций в ряды Тейлора и Лорана и вычисление интегралов от регулярных ветвей многозначных функций с помощью вычетов.

Регулярные ветви многозначной функции $\operatorname{Ln} f(z)$

Пусть $f(z)$ – голоморфная в области D функция.

Определение 1 . *Функцию $h(z)$ называют регулярной ветвью многозначной функции $Lnf(z)$ в области D, если выполнены условия:*

- *$h(z)$ голоморфна в области D;*
- *для $\forall z \in D$ значение функции $h(z)$ совпадает с одним из значений многозначной функции $Lnf(z)$.*

При решении задач мы будем применять следующие формулы.

Пусть $h(z)$ – регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln} f(z)$.

1. Значения, которые может принимать регулярная ветвь $h(z)$ в конкретной точке z_0

$$h(z_0) = \ln\big|f(z_0)\big| + i\arg f(z_0) + 2\pi k i, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \dots \tag{1}$$

В формуле (1) символом $\ln$ обозначен «обычный» натуральный логарифм положительного действительного числа.

2. Формула, позволяющая вычислить значение регулярной ветви $h(z)$ в точке z, если известно ее значение в точке z_0

$$h(z) = h(z_0) + \ln\frac{\big|f(z)\big|}{\big|f(z_0)\big|} + i\Delta_\gamma \arg f(z)\,, \tag{2}$$

где через

$$\Delta_\gamma \arg f(z)$$

обозначено изменение аргумента $f(z)$ вдоль кривой γ, ведущей из точки z_0 в точку z и лежащей в области D.

Замечание. На лекциях доказано, что, если в области D можно выделить регулярную ветвь $h(z)$, то изменение аргумента $f(z)$ вдоль кривой γ, ведущей из точки z_0 в точку z и лежащей в области D, не зависит от выбора кривой.

3. Вычисление производных регулярной ветви $h(z)$

Дифференцируя уравнение

$$e^{h(z)} = f(z)$$

получаем

$$e^{h(z)} \cdot h'(z) = f'(z)$$

Следовательно,

$$h'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} \tag{3}$$

Замечание. Из формулы (3) видно, что первая производная функции $h(z)$ (а, значит, и все последующие производные) не зависит от выбора ветви $h(z)$ и определяется только функцией $f(z)$.

4. Разложение регулярной ветви $h(z)$ в ряд Тейлора

   Ряд Тейлора для голоморфной функции $h(z)$ в окрестности произвольной точки $z_0 \in D$ имеет вид

$$h(z) = h(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!}\,(z - z_0)^n$$

   Поскольку все производные $h^{(n)}(z_0)$ не зависят от выбора ветви $h(z)$, то ряды Тейлора для различных ветвей $\mathrm{Ln} f(z)$ будут отличаться только первым слагаемым $h(z_0)$, то есть на константу.

   Это позволяет при разложении регулярной ветви в ряд Тейлора воспользоваться известными разложениями логарифма, а затем, вычислив $h(z_0)$, скорректировать результат.

Регулярные ветви многозначной функции $\sqrt[n]{f(z)}$

Пусть $f(z)$ – голоморфная в области D функция.

Определение 2 . *Многозначной функцией* $\sqrt[n]{f(z)}$ *называют функцию*

$$\sqrt[n]{f(z)} = e^{\frac{1}{n}\mathrm{Ln} f(z)}$$

Определение 3 . *Функцию* $h(z)$ *называют регулярной ветвью многозначной функции* $\sqrt[n]{f(z)}$ *в области* D , *если выполнены условия:*

- $h(z)$ *голоморфна в области* D*;*
- *для* $\forall z \in D$ *значение функции* $h(z)$ *совпадает с одним из значений многозначной функции* $\sqrt[n]{f(z)}$.

Используя свойства регулярных ветвей многозначной функции $\mathrm{Ln} f(z)$, получим необходимые формулы для регулярных ветвей многозначной функции $\sqrt[n]{f(z)}$.

Пусть $h(z)$ – регулярная ветвь многозначной функции $\sqrt[n]{f(z)}$.

1. Значения, которые может принимать регулярная ветвь $h(z)$ в конкретной точке z_0

   Из определения многозначной функции $\sqrt[n]{f(z)}$ и формулы (1) получаем

   $$h(z_0) = e^{\frac{1}{n}\left(\ln\left|f(z_0)\right| + i\arg f(z_0) + 2\pi k i\right)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

   Таким образом,

   $$h(z_0) = \sqrt[n]{\left|f(z_0)\right|} \cdot e^{\frac{i}{n}\arg f(z_0)} \cdot e^{\frac{2\pi k i}{n}}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{4}$$

   Заметим, что множитель из правой части формулы (4)

   $$e^{\frac{2\pi k i}{n}}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

   может принимать только n различных значений.

2. Формула, позволяющая вычислить значение регулярной ветви $h(z)$ в точке z, если известно ее значение в точке z_0

   Поскольку

   $$e^{\frac{1}{n}\,\mathrm{Ln} f(z)} = e^{\frac{1}{n}\left(\mathrm{Ln} f(z_0) + \ln\frac{|f(z)|}{|f(z_0)|} + i\Delta_\gamma \arg f(z)\right)}$$

   то

   $$h(z) = h(z_0) \cdot \sqrt[n]{\frac{\left|f(z)\right|}{\left|f(z_0)\right|}} \cdot e^{\frac{i}{n}\Delta_\gamma \arg f(z)}, \tag{5}$$

   где через

   $$\Delta_\gamma \arg f(z)$$

   обозначено изменение аргумента $f(z)$ вдоль кривой γ, ведущей из точки z_0 в точку z и лежащей в области D.

   В формуле (5) символом $\sqrt[n]{x}$ обозначен «обычный» корень n-ой степени из положительного действительного числа x.

3. Вычисление производных регулярной ветви $h(z)$

   Поскольку

   $$h(z) = e^{\frac{1}{n}\,\mathrm{Ln} f(z)}$$

   то

   $$h'(z) = e^{\frac{1}{n}\,\mathrm{Ln} f(z)} \cdot \left(\frac{1}{n}\mathrm{Ln} f(z)\right)' = h(z) \cdot \frac{f'(z)}{n\, f(z)} \tag{6}$$

Замечание. Из формулы (6) видно, что первая производная функции $h(z)$ (а, значит, и все последующие производные) отличается от $h(z)$ множителем, который не зависит от выбора ветви $h(z)$ и определяется только функцией $f(z)$.

4. Разложение регулярной ветви $h(z)$ в ряд Тейлора

   Ряд Тейлора для голоморфной функции $h(z)$ в окрестности произвольной точки $z_0 \in D$ имеет вид

$$h(z) = h(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

   Поскольку все производные $h^{(n)}(z_0)$ отличаются от $h(z_0)$ множителем, который не зависит от выбора ветви $h(z)$, то ряды Тейлора для различных ветвей $\sqrt[n]{f(z)}$ будут отличаться только множителем.

   Это позволяет при разложении регулярной ветви в ряд Тейлора воспользоваться известными разложениями корня n-ой степени, а затем, вычислив $h(z_0)$, скорректировать результат.

Примеры решения задач на разложения регулярных ветвей многозначных функций в ряды Тейлора и Лорана

Решим задачу из семестровой контрольной работы по ТФКП 2007/2008 учебного года.

Задача 1 *Регулярная ветвь многозначной функции*

$$g(z) = e^{-z} \cdot \mathrm{Ln}(z-1)$$

в плоскости с разрезом

$$\{z \in \mathbb{C} : \quad z = 1 - it, \quad t \geqslant 0\}$$

определена условием

$$g''(0) = 1 - i\pi$$

Найти первые три члена разложения $g(z)$ *в ряд Тейлора по степеням* $(z-2)$.

Решение.

Обозначим $h(z)$ регулярную ветвь функции $\mathrm{Ln}(z-1)$ такую, что

$$g(z) = e^{-z} \cdot h(z), \tag{7}$$

и найдем, чему равно значение $h(0)$. Для этого продифференцируем функцию $g(z)$:

$$g'(z) = -e^{-z}h(z) + e^{-z}h'(z) \tag{8}$$

$$g''(z) = e^{-z}h(z) - 2e^{-z}h'(z) + e^{-z}h''(z) \tag{9}$$

Вычислим производные функции $h(z)$ по формуле (3):

$$h'(z) = \frac{1}{z-1}\,, \qquad h''(z) = -\frac{1}{(z-1)^2}$$

Подставим эти выражения в формулы (8) и (9):

$$g'(z) = -e^{-z}h(z) + \frac{e^{-z}}{z-1} \tag{10}$$

$$g''(z) = e^{-z}h(z) - \frac{2e^{-z}}{z-1} - \frac{e^{-z}}{(z-1)^2} \tag{11}$$

Из условия

$$g''(0) = 1 - i\pi$$

получаем

$$g''(0) = h(0) + 2 - 1 = 1 - i\pi \qquad \Longrightarrow \qquad h(0) = -i\pi$$

Поскольку в задаче нужно найти три члена разложения в ряд Тейлора по степеням $(z-2)$ нам потребуется значение $h(2)$. Для того, чтобы его найти, сделаем рисунок.

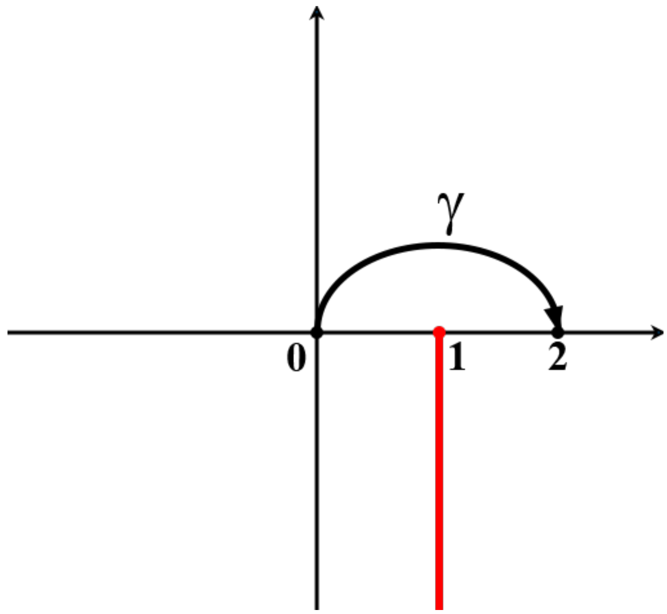

Рис. 1

На рис. 1 красной линией обозначен разрез. Для вычисления значения $h(2)$ воспользуемся формулой (2):

$$h(2) = h(0) + \ln\frac{|2-1|}{|0-1|} + i\Delta_\gamma \arg(z-1) = -i\pi + (-i\pi) = -2i\pi$$

Теперь можно выписать первые три члена разложения функции $g(z)$ в ряд Тейлора по степеням $(z-2)$, вычисляя $g(2)$, $g'(2)$, $g''(2)$ по формулам (7), (10) и (11)

$$g(z) = g(2) + g'(2)(z-2) + \frac{g''(2)}{2}(z-2)^2 + o\left((z-2)^2\right) =$$

$$= e^{-2}h(2) + \left(-e^{-2}h(2) + e^{-2}\right)(z-2) + \frac{e^{-2}h(2) - 2e^{-2} - e^{-2}}{2}(z-2)^2 + o\left((z-2)^2\right) =$$

$$= e^{-2}(-2i\pi) + e^{-2}\left(1 + 2i\pi\right)(z-2) - e^{-2}\,\frac{2i\pi + 3}{2}\,(z-2)^2 + o\left((z-2)^2\right)$$

Ответ.

$$g(z) = -2i\pi e^{-2} + e^{-2}\left(1 + 2i\pi\right)(z-2) - e^{-2}\,\frac{2i\pi + 3}{2}\,(z-2)^2 + o\left((z-2)^2\right)$$

Решим задачу из семестровой контрольной работы по ТФКП 2002/2003 учебного года.

Задача 2 *Пусть* $f(z)$ *– регулярная ветвь функции* $\sqrt{9-z^2}$ *в плоскости с разрезом по дуге окружности*

$$\{|z-4i|=5, \quad \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$$

причем $f(4i)=5$. *Разложить* $f(z)$ *в ряд Лорана по степеням* z *в окрестности* $z=\infty$ *и найти область сходимости полученного ряда. Вычислить сумму ряда в точке* $z=4i$. *Определить максимальную область, в которой функция* $f(z)$ *совпадает с суммой ряда Лорана.*

Решение.

Поскольку в задаче требуется разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням z в окрестности $z=\infty$, то преобразуем функцию $f(z)$ к виду

$$f(z)=Cz\cdot\sqrt{1-\frac{9}{z^2}} \tag{12}$$

где C – некоторая константа, а у многозначной функции

$$\sqrt{1-\frac{9}{z^2}}$$

выбрана та ветвь $g(z)$, которая принимает действительные положительные значения при действительных значениях $z\in(3,+\infty)$.

На луче действительной оси $(3,+\infty)$ для функции $g(z)$ справедливо разложение

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} C_{\frac{1}{2}}^{n}\,\frac{(-1)^n 9^n}{x^{2n}}$$

Из теоремы единственности отсюда следует, что в области комплексной плоскости $|z|>3$ справедливо разложение

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_{\frac{1}{2}}^{n}\,\frac{(-1)^n 9^n}{z^{2n}}$$

Подставляя это разложение в формулу (12), получаем

$$f(z)=Cz\,\sqrt{1-\frac{9}{z^2}}=Czg(z)=Cz\sum_{n=0}^{\infty} C_{\frac{1}{2}}^{n}\,\frac{(-1)^n 9^n}{z^{2n}}\,, \qquad |z|>3 \tag{13}$$

Для того, чтобы определить константу C, найдем значение $f(x)$ при действительных значениях $x\in(3,+\infty)$. С этой целью рассмотрим рис. 2.

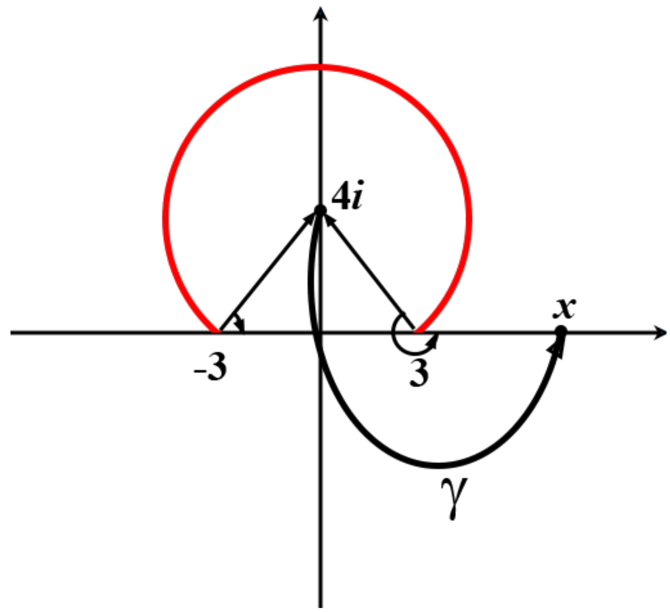

Рис. 2

На рис. 2 красной линией обозначен разрез. Для вычисления значения $f(x)$ воспользуемся формулой (5) с $z_0 = 4i$:

$$f(x) = f(4i) \cdot \sqrt{\frac{|9-x^2|}{|9+16|}} \cdot e^{\frac{i}{2}\Delta_\gamma \arg(9-z^2)} = 5 \cdot \frac{\sqrt{x^2-9}}{5} e^{\frac{i}{2}\left(\Delta_\gamma \arg(z-3)+\Delta_\gamma \arg(z+3)\right)} =$$

$$= \sqrt{x^2-9} \cdot e^{\frac{i}{2}\left(\pi + \operatorname{arctg}\frac{4}{3} - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)} = \sqrt{x^2-9}\, e^{\frac{i\pi}{2}} = i\sqrt{x^2-9}$$

Подставляя это значение в формулу (12), находим

$$f(x) = Cx\sqrt{1-\frac{9}{x^2}} = C\sqrt{x^2-9}$$

$$i\sqrt{x^2-9} = C\sqrt{x^2-9}$$

Таким образом,

$$C = i$$

и разложение $f(z)$ в ряд Лорана по степеням z в окрестности $z = \infty$ имеет вид

$$f(z) = iz\sum_{n=0}^{\infty} C_{\frac{1}{2}}^{n} \frac{(-1)^n 9^n}{z^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{\frac{1}{2}}^{n} \frac{i(-1)^n 9^n}{z^{2n-1}}$$

Область сходимости полученного ряда: $|z| > 3$.

Подсчитаем сумму ряда

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{\frac{1}{2}}^{n} \frac{i(-1)^n 9^n}{z^{2n-1}} \tag{14}$$

в точке $z = 4i$. Для этого заметим, что $S(z)$ является голоморфной функцией в области $|z| > 3$, причем на интервале $(3, +\infty)$ действительной оси выполнено равенство

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{\frac{1}{2}}^{n} \frac{i(-1)^n 9^n}{x^{2n-1}} = ix\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}} = i\sqrt{x^2 - 9}$$

Отсюда следует, что $S(z)$ является регулярной ветвью функции $i\sqrt{z^2 - 9}$ в области $|z| > 3$. Вычислим значение $S(4i)$. Для этого рассмотрим еще один рисунок.

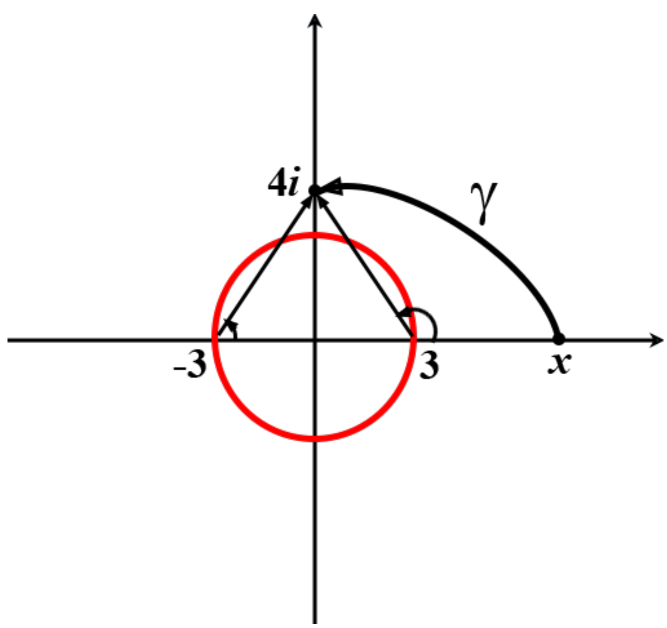

Рис. 3

На рис. 3 красной линией обозначена граница области сходимости ряда (14). Для вычисления значения $S(4i)$ воспользуемся формулой (5) с $z_0 = x$:

$$S(4i) = S(x) \cdot \sqrt{\frac{|-16-9|}{|x^2-9|}} \cdot e^{\frac{i}{2}\Delta_\gamma \arg(z^2-9)} =$$

$$= i\sqrt{x^2-9}\cdot\frac{5}{\sqrt{x^2-9}}\,e^{\frac{i}{2}\left(\Delta_\gamma\arg(z-3)+\Delta_\gamma\arg(z+3)\right)} = 5i\,e^{\frac{i}{2}\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)} =$$

$$= 5ie^{\frac{i\pi}{2}} = -5$$

Изобразим максимальную область, в которой функция $f(z)$ совпадает с суммой ряда Лорана $S(z)$. На рисунке 4 эта область отмечена голубой заливкой, темно-синим цветом изображен разрез, а красным цветом - граница области сходимости ряда (14)

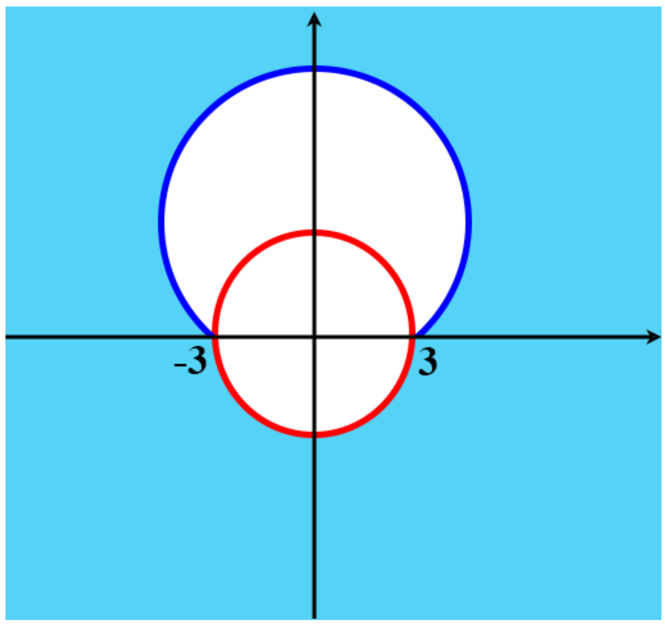

Рис. 4

Примеры решения задач на вычисление интегралов от регулярных ветвей многозначных функций с помощью вычетов

Решим задачу из семестровой контрольной работы по ТФКП 2014/2015 учебного года.

Задача 3 *Доказать, что многозначная функция*

$$\operatorname{Ln}\frac{z-i}{3i+z}$$

допускает выделение регулярных ветвей в комплексной плоскости с разрезом по дуге окружности

$$\{z : |z+i| = 2, \quad \operatorname{Re} z \geqslant 0\}$$

Разложить регулярную ветвь $g(z)$, $\operatorname{Im} g(2i) = 2\pi$, *в ряд Тейлора по степеням* $(z+i)$ *в окрестности точки* $z = -i$. *Вычислить интеграл*

$$\oint\limits_{|z+i|=1} \frac{(z+1)g(z)}{(z+i)^2}\, dz$$

Решение.

1. Докажем, что многозначная функция

$$\operatorname{Ln} \frac{z-i}{3i+z}$$

допускает выделение регулярных ветвей в комплексной плоскости с разрезом по дуге окружности

$$\{z : |z+i| = 2, \quad \operatorname{Re} z \geqslant 0\}$$

Воспользуемся теоремой, доказанной на лекциях, которая утверждает, что многозначная функция $\operatorname{Ln} f(z)$, где $f(z)$ – голоморфная в области D функция и $f(z) \neq 0$ для $z \in D$, допускает выделение регулярных ветвей в области D тогда и только тогда, когда для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой γ, расположенной в D, выполняется условие

$$\Delta_\gamma \arg f(z) = 0$$

Изобразим комплексную плоскость с указанным в задаче разрезом и рассмотрим на ней произвольную замкнутую кривую γ.

Возможны 2 случая.

а) Разрез лежит внутри области, ограниченной кривой γ (рис. 5)

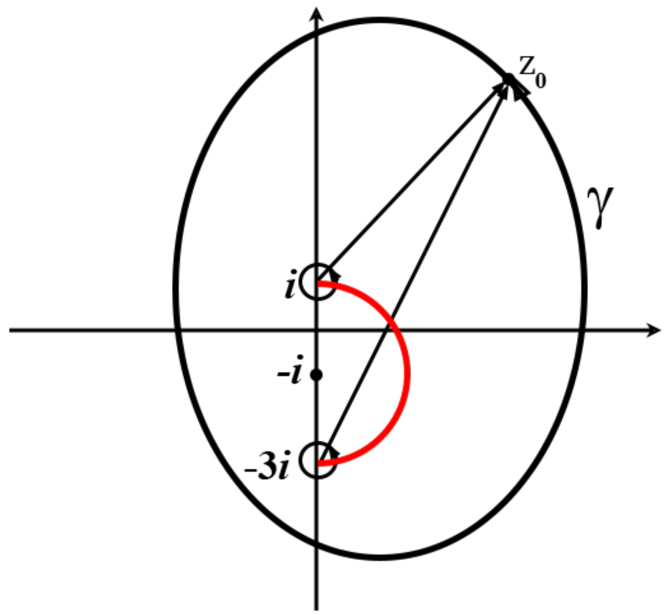

Рис. 5

В этом случае

$$\Delta_\gamma \arg \frac{z-i}{3i+z} = \Delta_\gamma \arg(z-i) - \Delta_\gamma \arg(z+3i) = 2\pi - 2\pi = 0$$

б) Разрез лежит вне области, ограниченной кривой γ (рис. 6)

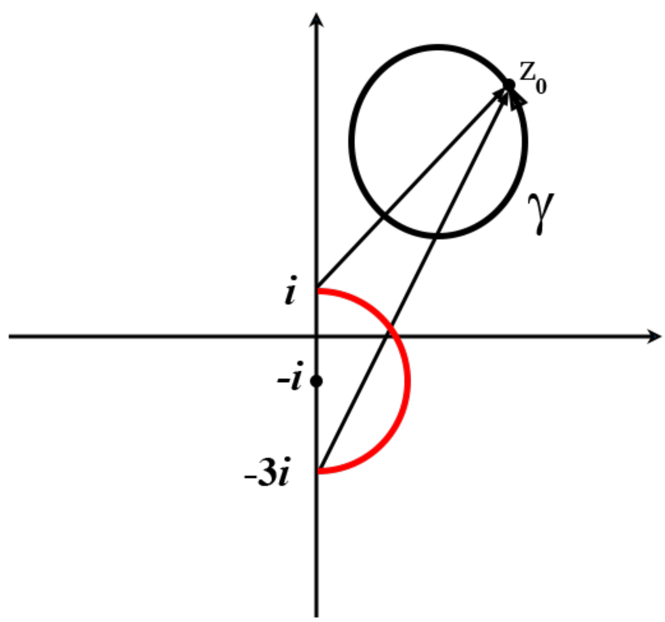

Рис. 6

Тогда

$$\Delta_\gamma \arg \frac{z-i}{3i+z} = \Delta_\gamma \arg(z-i) - \Delta_\gamma \arg(z+3i) = 0 - 0 = 0$$

Таким образом, доказано, что многозначная функция

$$\mathrm{Ln}\, \frac{z-i}{3i+z}$$

допускает выделение регулярных ветвей в указанной в задаче области.

2. Перейдем к разложению регулярной ветви $g(z)$, заданной условием $\mathrm{Im}\, g(2i) = 2\pi$, в ряд Тейлора по степеням $(z+i)$ в окрестности точки $z=-i$.

С этой целью продолжим разрез вверх на мнимой оси по лучу $(i, +i\infty)$ и преобразуем функцию $g(z)$ к виду

$$g(z) = C + \mathrm{Ln}\,(z-i) - \mathrm{Ln}\,(z+3i) = C + \mathrm{Ln}\,\big((z+i)-2i\big) - \mathrm{Ln}\,\big((z+i)+2i\big) =$$

$$= C_1 + \mathrm{Ln}\,\left(1 - \frac{z+i}{2i}\right) - \mathrm{Ln}\,\left(1 + \frac{z+i}{2i}\right)$$

где C_1 – некоторая константа, а у многозначных функций

$$\mathrm{Ln}\,\left(1 - \frac{z+i}{2i}\right) \quad \text{и} \quad \mathrm{Ln}\,\left(1 + \frac{z+i}{2i}\right)$$

выбраны те ветви, которые принимают значение 0 при $z=-i$.

Поскольку на интервале мнимой оси $(-3i, i)$ справедливо равенство

$$C_1 + \mathrm{Ln}\,\left(1 - \frac{ix+i}{2i}\right) - \mathrm{Ln}\,\left(1 + \frac{ix+i}{2i}\right) =$$

$$= C_1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{ix+i}{2i}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{ix+i}{2i}\right)^n$$

то по теореме единственности в области $|z+i| < 2$ справедливо разложение

$$g(z) = C_1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{z+i}{2i}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{z+i}{2i}\right)^n \tag{15}$$

Для того, чтобы определить константу C_1, найдем значение $g(-i)$. С этой целью рассмотрим рис. 7.

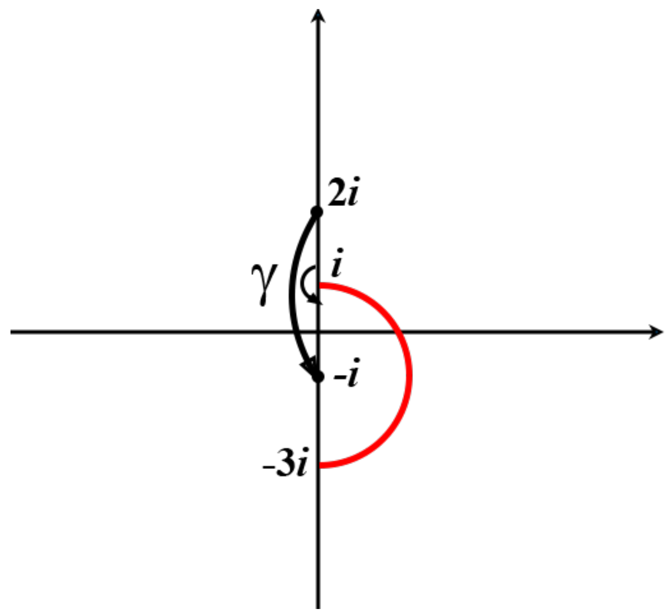

Рис. 7

На рис. 7 красной линией обозначен разрез.

Найдем сначала значение $g(2i)$. По формуле (1)

$$g(2i) = \ln\left|\frac{2i-i}{3i+2i}\right| + i\arg\frac{2i-i}{3i+2i} + 2\pi ki = -\ln 5 + 2\pi ki$$

С учетом условия $\operatorname{Im} g(2i) = 2\pi$ получаем: $g(2i) = -\ln 5 + 2\pi i$.

Для вычисления значения $g(-i)$ воспользуемся формулой (2) с $z_0 = 2i$:

$$g(-i) = g(2i) + \ln\frac{\left|\frac{-i-i}{3i+(-i)}\right|}{\left|\frac{2i-i}{3i+2i}\right|} + i\Delta_\gamma \arg\frac{z-i}{3i+z} =$$

$$= -\ln 5 + 2\pi i + \ln 5 + i\Big(\Delta_\gamma \arg(z-i) - \Delta_\gamma \arg(z+3i)\Big) =$$

$$= -\ln 5 + 2\pi i + \ln 5 + i\,(\pi - 0) = 3\pi i$$

Подставляя это значение в формулу (15), находим

$$g(-i) = C_1 = 3\pi i$$

Таким образом, разложение функции $g(z)$ в ряд Тейлора имеет вид

$$g(z) = 3\pi i - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{z+i}{2i}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{z+i}{2i}\right)^n =$$

$$= 3\pi i - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{n(2i)^n}\Big(1 + (-1)^{n-1}\Big) = 3\pi i - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(z+i)^{2k+1}}{(2k+1)(2i)^{2k+1}} \qquad (16)$$

3. Перейдем к вычислению интеграла

$$\oint\limits_{|z+i|=1} \frac{(z+1)g(z)}{(z+i)^2}\, dz$$

Сделаем рисунок.

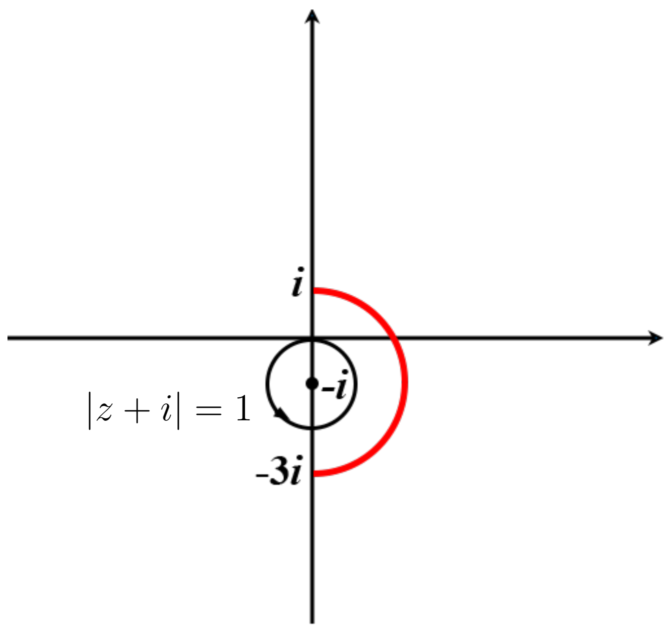

Рис. 8

Поскольку внутри круга

$$|z+i| < 1$$

подынтегральная функция

$$\frac{(z+1)g(z)}{(z+i)^2}$$

имеет единственную особую точку $z = -i$, то по теореме Коши о вычетах получаем, что

$$\oint\limits_{|z+i|=1} \frac{(z+1)g(z)}{(z+i)^2}\, dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=-i} \frac{(z+1)g(z)}{(z+i)^2}$$

Для подсчета вычета воспользуемся разложением (16) функции $g(z)$ в ряд Тейлора по степеням $(z+i)$, записав в явном виде его начало:

$$g(z) = 3\pi i - \frac{2(z+i)}{2i} + o(z+i) = 3\pi i + i(z+i) + o(z+i)$$

Тогда

$$\frac{(z+1)g(z)}{(z+i)^2} = \frac{1}{(z+i)^2}\Big((z+i)+1-i\Big)\Big(3\pi i + i(z+i) + o(z+i)\Big) =$$

$$= \frac{1}{(z+i)^2}\Big(3\pi i(1-i) + (z+i)(3\pi i + i(1-i)) + o(z+i)\Big)$$

Таким образом, коэффициент c_{-1} в разложении функции

$$\frac{(z+1)g(z)}{(z+i)^2}$$

в ряд Лорана по степеням $(z+i)$ равен

$$c_{-1} = 3\pi i + i(1-i) = 1 + i(3\pi+1)$$

Следовательно,

$$\operatorname*{res}_{z=-i} \frac{(z+1)g(z)}{(z+i)^2} = c_{-1} = 1 + i(3\pi+1)$$

а, значит,

$$\oint\limits_{|z+i|=1} \frac{(z+1)g(z)}{(z+i)^2}\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=-i} \frac{(z+1)g(z)}{(z+i)^2} = 2\pi i\Big(1+i(3\pi+1)\Big) =$$

$$= -2\pi(3\pi+1) + 2\pi i$$

Ответ.

$$g(z) = 3\pi i - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(z+i)^{2k+1}}{(2k+1)(2i)^{2k+1}}\,, \qquad \oint\limits_{|z+i|=1} \frac{(z+1)g(z)}{(z+i)^2}\,dz = -2\pi(3\pi+1)+2\pi i$$

Разберем еще одну задачу из семестровой контрольной работы по ТФКП 2017/2018 учебного года.

Задача 4 *Пусть* $g(z)$ *– регулярная ветвь многозначной функции* $\sqrt{z^2+9}$ *в комплексной плоскости с разрезом по лучам*

$$\{z:\ z=3i+(1-i)t,\ t\geqslant 0\} \qquad \text{и} \qquad \{z:\ z=-3i-(1-i)t,\ t\geqslant 0\}$$

такая, что $\arg g(-4)=0$. *Вычислить интеграл*

$$\oint\limits_{\gamma_1\cup\gamma_2} \frac{dz}{\left(g(z)+3+\frac{z}{2}\right)^2}$$

где

$$\gamma_1=\{z:\ |z|=1\} \qquad \text{и} \qquad \gamma_2=\left\{z:\ |z-4|=\frac{1}{2}\right\}$$

окружности, ориентированные против хода часовой стрелки.

Решение.

1. Выясним сначала, какие особые точки есть у подынтегральной функции.

Поскольку $g(z)$ – регулярная ветвь многозначной функции $\sqrt{z^2+9}$, то

$$g^2(z)=z^2+9$$

Для того, чтобы найти особые точки, решим уравнение

$$g(z)=-3-\frac{z}{2} \tag{17}$$

Возводя обе части уравнения (17) в квадрат, получаем

$$z^2+9=\left(3+\frac{z}{2}\right)^2$$

$$z^2+9=9+3z+\frac{z^2}{4}$$

$$\frac{3z^2}{4}=3z$$

$$z_1=0; \quad z_2=4$$

Так как возведение обеих частей уравнения в квадрат может привести к появлению посторонних корней, то полученные корни нужно проверить.

а) Рассмотрим сначала корень $z_1=0$. Чтобы осуществить проверку, вычислим значение $g(0)$. С этой целью сделаем рисунок.

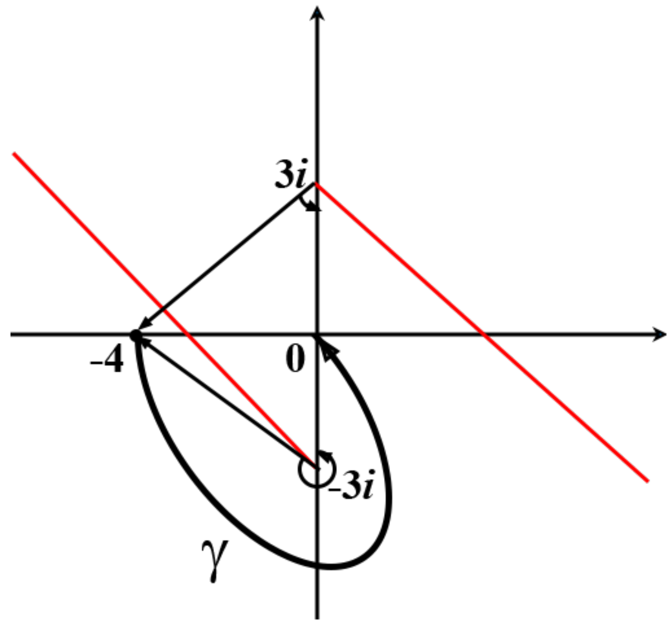

Рис. 9

На рис. 9 красными линиями обозначен разрез.

Найдем сначала значение $g(-4)$. По формуле (4)

$$g(-4) = \sqrt{|(-4)^2+9|} \cdot e^{\frac{2\pi k i}{2}} = 5\, e^{\pi k i},$$

С учетом условия $\arg g(-4) = 0$ получаем: $g(-4) = 5$.

Для вычисления значения $g(0)$ воспользуемся формулой (5) с $z_0 = -4$:

$$g(0) = g(-4) \cdot \sqrt{\frac{|0+9|}{|(-4)^2+9|}} \cdot e^{\frac{i}{2}\Delta_\gamma \arg(z^2+9)} = 5 \cdot \frac{3}{5} e^{\frac{i}{2}\left(\Delta_\gamma \arg(z-3i) + \Delta_\gamma \arg(z+3i)\right)} =$$

$$= 3\, e^{\frac{i}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3} + 2\pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)} = 3e^{\pi i} = -3$$

Подставляя значения $g(0) = -3$ и $z = 0$ в уравнение (17), убеждаемся, что оно превращается в верное равенство. Таким образом, $z = 0$ – это особая точка подынтегральной функции.

б) Проверим теперь корень $z_2 = 4$. Чтобы осуществить проверку, вычислим значение $g(4)$. С этой целью сделаем новый рисунок.

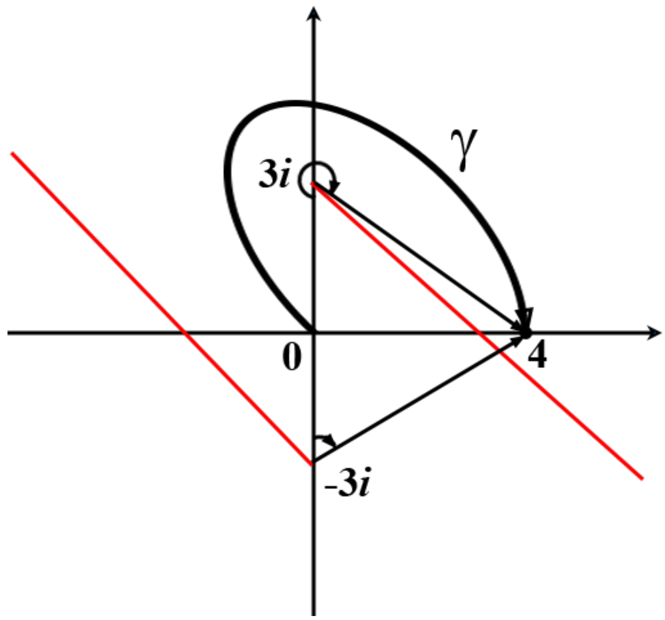

Рис. 10

Найдем значение $g(4)$ по формуле (5) с $z_0 = 0$:

$$g(4) = g(0) \cdot \sqrt{\frac{|16+9|}{|0+9|}} \cdot e^{\,\frac{i}{2}\Delta\gamma \arg(z^2+9)} = -3 \cdot \frac{5}{3} e^{\,\frac{i}{2}\left(\Delta\gamma \arg(z-3i) + \Delta\gamma \arg(z+3i)\right)} =$$

$$= -5\, e^{\,\frac{i}{2}\left(-\left(2\pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)} = -5e^{-\pi i} = 5$$

Подставляя найденное значение $g(4)$ и $z = 4$ в уравнение (17), видим, что

$$5 \neq -3 - \frac{4}{2}$$

Таким образом, $z = 4$ не является особой точкой подынтегральной функции.

2. Перейдем к вычислению интеграла

$$\oint\limits_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \frac{dz}{\left(g(z) + 3 + \frac{z}{2}\right)^2} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{\left(g(z) + 3 + \frac{z}{2}\right)^2} + \oint\limits_{|z-4|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{\left(g(z) + 3 + \frac{z}{2}\right)^2}$$

Рассмотрим интегралы из правой части равенства по отдельности.

Поскольку внутри круга

$$|z - 4| \leqslant \frac{1}{2}$$

нет особых точек подынтегральной функции, то

$$\oint\limits_{|z-4|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{\left(g(z)+3+\frac{z}{2}\right)^2} = 0$$

Поскольку внутри круга $|z| \leqslant 1$ подынтегральная функция имеет единственную особую точку $z = 0$, то по теореме Коши о вычетах получаем

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{\left(g(z)+3+\frac{z}{2}\right)^2} = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} \frac{1}{\left(g(z)+3+\frac{z}{2}\right)^2}$$

Для подсчета вычета найдем несколько первых членов разложения функции $g(z)$ по формуле Тейлора по степеням z :

$$g(z) = g(0) + g'(0)\, z + g''(0)\, \frac{z^2}{2} + o\big(z^2\big)$$

Дифференцируя функцию $g(z)$ по формуле (6), получаем

$$g'(z) = g(z)\, \frac{2z}{2(z^2+9)} = g(z)\, \frac{z}{z^2+9} \qquad \Longrightarrow \qquad g'(0) = 0$$

Вычислим вторую производную

$$g''(z) = g'(z)\, \frac{z}{z^2+9} + g(z)\, \frac{1}{z^2+9} - g(z)\, \frac{2z^2}{(z^2+9)^2} \qquad \Longrightarrow \qquad g''(0) = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$$

Таким образом,

$$g(z) = -3 - \frac{z^2}{6} + o\big(z^2\big),$$

$$g(z) + 3 + \frac{z}{2} = \frac{z}{2} - \frac{z^2}{6} + o\big(z^2\big).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\left(g(z)+3+\frac{z}{2}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{z}{2}-\frac{z^2}{6}+o\big(z^2\big)\right)^2} = \frac{4}{z^2\left(1-\frac{z}{3}+o\big(z\big)\right)^2} =$$

$$= \frac{4}{z^2}\left(1 - \frac{z}{3} + o\big(z\big)\right)^{-2} = \frac{4}{z^2}\left(1 + \frac{2z}{3} + o\big(z\big)\right)$$

Значит, в разложении функции

$$\frac{1}{\left(g(z)+3+\frac{z}{2}\right)^2}$$

в ряд Лорана по степеням z коэффициент

$$c_{-1}=\frac{8}{3}$$

Следовательно,

$$\operatorname*{res}_{z=0}\frac{1}{\left(g(z)+3+\frac{z}{2}\right)^2}=\frac{8}{3}$$

а, значит,

$$\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{\left(g(z)+3+\frac{z}{2}\right)^2}=2\pi i\operatorname*{res}_{z=0}\frac{1}{\left(g(z)+3+\frac{z}{2}\right)^2}=\frac{16\pi i}{3}$$

Таким образом,

$$\oint\limits_{\gamma_1\cup\gamma_2}\frac{dz}{\left(g(z)+3+\frac{z}{2}\right)^2}=\frac{16\pi i}{3}$$

Ответ.

$$\oint\limits_{\gamma_1\cup\gamma_2}\frac{dz}{\left(g(z)+3+\frac{z}{2}\right)^2}=\frac{16\pi i}{3}$$

Спасибо за внимание.
Не болейте!