Принцип максимума модуля голоморфной функции

Самарова С.С.

ФОПФ, 3 курс, ТФКП

Учебное пособие для дистанционных занятий

Пособие посвящено применениям принципа максимума модуля голоморфной функции к решению задач.

Утверждение 1 (Принцип максимума модуля) *Пусть* f *– непостоянная голоморфная в области* D *функция. Тогда максимум модуля функции* f, *а также максимумы и минимумы вещественной и мнимой частей функции* f *не могут достигаться в точках области* D.

Утверждение 1 относится к произвольной области D. В следующем утверждении область D предполагается ограниченной.

Утверждение 2 *Функция* f, *голоморфная в ограниченной области* D *и непрерывная в ее замыкании* $\overline{D}$, *достигает максимума модуля на границе* ∂D *области* D.

Решим задачу Т.4 из домашнего задания.

Задача 1 *Пусть* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *– вершины правильного* n *-угольника, вписанного в единичный круг* $\mathbb{D}$. *Доказать, что*

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} \prod_{k=1}^{n} |z - a_k| = 2$$

Доказательство.

Так как точки $a_1, a_2, \ldots, a_n$ находятся на единичной окружности, то,

$$a_1 = e^{i\alpha}$$

где α – некоторое действительное число, и выполнено равенство

$$a_k = e^{i\alpha + i\frac{2\pi(k-1)}{n}}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Поэтому

$$f(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - a_k) = \prod_{k=1}^{n}\left(z - e^{i\alpha + i\frac{2\pi(k-1)}{n}}\right) = e^{in\alpha}\prod_{k=1}^{n}\left(ze^{-i\alpha} - e^{i\frac{2\pi(k-1)}{n}}\right)$$

Поскольку числа

$$e^{i\frac{2\pi(k-1)}{n}}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

являются корнями n -ой степени из 1, то

$$\prod_{k=1}^{n}\left(z - e^{i\frac{2\pi(k-1)}{n}}\right) = z^n - 1$$

и функция $f(z)$ принимает вид

$$f(z) = e^{in\alpha}\prod_{k=1}^{n}\left(ze^{-i\alpha} - e^{i\frac{2\pi(k-1)}{n}}\right) = e^{in\alpha}\left(\left(ze^{-i\alpha}\right)^n - 1\right) = z^n - e^{in\alpha}$$

Так как функция $f(z)$ голоморфна в единичном круге $\mathbb{D}$ и непрерывна в $\overline{\mathbb{D}}$, то по принципу максимума модуля для голоморфных функций она достигает максимума модуля на границе единичного круга: $|z| = 1$.

Следовательно,

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}\prod_{k=1}^{n}|z - a_k| = \sup_{z\in\mathbb{D}}|f(z)| = \max_{|z|=1}|f(z)| = \max_{|z|=1}\left|z^n - e^{in\alpha}\right| \leqslant 2$$

Однако при $z = e^{i\alpha + i\frac{\pi}{n}}$ справедливо неравенство

$$\max_{|z|=1}\left|z^n - e^{in\alpha}\right| \geqslant \left|\left(e^{i\alpha + i\frac{\pi}{n}}\right)^n - e^{in\alpha}\right| = \left|e^{in\alpha + i\pi} - e^{in\alpha}\right| = \left|e^{in\alpha}\right| \cdot |-1-1| = 2$$

Доказано.

Решим задачу Т.1 из домашнего задания.

Задача 2 *Пусть*

$$P(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_n$$

Доказать, что, если $P(z) \not\equiv z^n$, *то найдется на единичной окружности точка* z_0, *в которой*

$$\bigl|P(z_0)\bigr| > 1$$

Доказательство.

Представим многочлен $P(z)$ в виде

$$P(z) = z^n \left(1 + c_1 \frac{1}{z} + \ldots + c_n \frac{1}{z^n}\right)$$

и рассмотрим функцию

$$g(w) = 1 + c_1 w + \ldots + c_n w^n$$

Поскольку многочлен $P(z) \not\equiv z^n$, то среди его коэффициентов $c_1, c_2, \ldots, c_n$ есть по крайней мере один ненулевой коэффициент. Следовательно, функция $g(w)$ голоморфна в единичном круге $|w| < 1$, непрерывна в замкнутом круге $|w| \leqslant 1$ и не равна тождественно 1.

По принципу максимума модуля голоморфной функции

$$\max_{|w|\leqslant 1} \bigl|g(w)\bigr| = \max_{|w|=1} \bigl|g(w)\bigr| > \bigl|g(0)\bigr| = 1$$

Значит, на единичной окружности существует такая точка w_0, что

$$\bigl|g(w_0)\bigr| = \max_{|w|=1} \bigl|g(w)\bigr| > 1$$

Точка z_0, заданная формулой

$$z_0 = \frac{1}{w_0}\ ,$$

также лежит на единичной окружности, причем

$$\bigl|P(z_0)\bigr| = \left|z_0^n \left(1 + c_1 \frac{1}{z_0} + \ldots + c_n \frac{1}{z_0^n}\right)\right| = \left|g\left(\frac{1}{z_0}\right)\right| = \bigl|\, g(w_0)\bigr| > 1$$

Доказано.

Решим задачу Т.2 из домашнего задания.

Задача 3 *Пусть* $P(z)$ *– полином степени* n *и*

$$M(r) = \max_{|z|=r} \left|P(z)\right|$$

Докажите, что для $0 < r_1 < r_2$ *выполняется неравенство*

$$\frac{M(r_1)}{r_1^n} \geqslant \frac{M(r_2)}{r_2^n}$$

Решение. Пусть $P(z)$ имеет вид

$$P(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_n$$

Рассмотрим сначала случай, когда $P(z) \not\equiv z^n$, и, как и в предыдущей задаче, введем функцию

$$g(w) = 1 + c_1 w + \ldots + c_n w^n$$

Функция $g(w)$ голоморфна в круге $|w| < \dfrac{1}{r_2}$, непрерывна в замкнутом круге $|w| \leqslant \dfrac{1}{r_2}$ и не равна тождественно 1.

По принципу максимума модуля голоморфной функции

$$\max_{|w| \leqslant \frac{1}{r_2}} \left|g(w)\right| = \max_{|w| = \frac{1}{r_2}} \left|g(w)\right|$$

Поскольку по условию $r_1 < r_2$, то

$$\frac{1}{r_2} < \frac{1}{r_1}$$

Точно так же, рассматривая $g(w)$ в круге $|w| < \dfrac{1}{r_1}$, по принципу максимума модуля заключаем, что

$$\max_{|w| \leqslant \frac{1}{r_1}} \left|g(w)\right| = \max_{|w| = \frac{1}{r_1}} \left|g(w)\right| \geqslant \max_{|w| = \frac{1}{r_2}} \left|g(w)\right|$$

Возвращаясь к полиному $P(z)$, получаем

$$\frac{M(r_1)}{r_1^n} = \frac{\max\limits_{|z|=r_1} \bigl|P(z)\bigr|}{r_1^n} = \max_{|z|=r_1} \left|\frac{1}{z^n}\, P(z)\right| = \max_{|z|=r_1} \left|g\left(\frac{1}{z}\right)\right| =$$

$$= \max_{|w|=\frac{1}{r_1}} \bigl|g(w)\bigr| \geqslant \max_{|w|=\frac{1}{r_2}} \bigl|g(w)\bigr| = \frac{M(r_2)}{r_2^n}$$

Утверждение для случая, когда $P(z) \not\equiv z^n$, доказано.

Остается заметить, что для случая $P(z) \equiv z^n$ утверждение задачи превращается в тривиальное неравенство

$$1 \geqslant 1$$

Таким образом, доказательство полностью завершено.

Спасибо за внимание.
Не болейте!