Метод стационарной фазы

Самарова С.С.

ФОПФ, 3 курс, ТФКП

Учебное пособие для дистанционных занятий

Пособие посвящено исследованию асимптотического поведения функций специального вида с помощью метода стационарной фазы.

Рассмотрим функцию вещественного аргумента $F(\lambda)$, заданную формулой

$$F(\lambda) = \int_a^b f(t)\, e^{i\lambda S(t)}\, dt \; ,$$

где $[a,\, b]$ – конечный отрезок, $f(t)$ и $S(t)$ – бесконечно дифференцируемые функции.

Функцию $f(t)$ называют амплитудой, а функцию $S(t)$ – фазой.

Метод стационарной фазы позволяет в некоторых случаях найти главный член асимптотики функции $F(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$.

Пусть $t_0 \in (a, b)$ – стационарная точка фазы $S(t)$, т.е. $S'(t_0) = 0$.

Определение 1 *Стационарную точку фазы* t_0 *называют невырожденной, если*

$$S''(t_0) \neq 0$$

Утверждение 1 (Метод стационарной фазы) *Пусть фаза* $S(t)$ *имеет единственную невырожденную стационарную точку* $t_0 \in (a, b)$. *Тогда*

1. *Если* $S''(t_0) > 0$, *то*

$$F(\lambda) = \int\limits_a^b f(t)\, e^{i\lambda S(t)}\, dt = e^{i\lambda S(t_0) + i\pi/4}\, f(t_0)\, \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda\, S''(t_0)}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

при $\lambda \to \infty$;

2. *Если* $S''(t_0) < 0$, *то*

$$F(\lambda) = \int\limits_a^b f(t)\, e^{i\lambda S(t)}\, dt = e^{i\lambda S(t_0) - i\pi/4}\, f(t_0)\, \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda\, S''(t_0)}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

при $\lambda \to \infty$.

Решим задачу Т.13 (b) из домашнего задания.

Задача 1 *Используя метод стационарной фазы, найти главный член асимптотики при* $\lambda \to \infty$ *интеграла*

$$\int\limits_0^1 \cos t\, e^{i\lambda t^2}\, dt$$

Решение. В этой задаче амплитуда $f(t) = \cos t$, а фаза $S(t) = t^2$.

Найдем стационарные точки фазы:

$$S'(t) = 2t = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = 0$$

Единственная стационарная точка $t = 0 \notin (0,\, 1)$, поэтому сразу же применить метод стационарной фазы мы не можем. Однако заметим, что функция

$$\cos t\, e^{i\lambda t^2}$$

является четной, поэтому

$$I(\lambda) = \int\limits_0^1 \cos t\, e^{i\lambda t^2}\, dt = \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^1 \cos t\, e^{i\lambda t^2}\, dt$$

Теперь стационарная точка $t = 0 \in (-1,\, 1)$, и метод стационарной фазы применим.

Поскольку
$$S''(0) = 2 > 0\,,$$
то в силу метода стационарной фазы получаем
$$I(\lambda) = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} \cos t\, e^{i\lambda t^2}\, dt = \frac{1}{2}\, e^{i\lambda S(0) + i\pi/4}\, f(0)\,\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda\, S''(0)}} + O\!\left(\frac{1}{\lambda}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\, e^{i\pi/4}\,\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} + O\!\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$
при $\lambda \to \infty$.

Ответ. $\frac{1}{2}\, e^{i\pi/4}\,\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$

Решим задачу Т.13 (a) из домашнего задания.

Задача 2 *Используя метод стационарной фазы, найти главный член асимптотики при* $\lambda \to \infty$ *интеграла*
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda\sqrt{t^2+1}}}{t^2+1}\, dt$$

Решение.

В этой задаче амплитуда
$$f(t) = \frac{1}{t^2+1}$$
а фаза $S(t) = \sqrt{t^2+1}$.

Найдем стационарные точки фазы:
$$S'(t) = \frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}} = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad t = 0$$

Поскольку метод стационарной фазы можно применять к интегралам с конечными пределами интегрирования, а в задаче рассматривается несобственный интеграл, то представим исходный интеграл в виде суммы трех интегралов
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda\sqrt{t^2+1}}}{t^2+1}\, dt = \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{e^{i\lambda\sqrt{t^2+1}}}{t^2+1}\, dt + \int\limits_{-1}^{1} \frac{e^{i\lambda\sqrt{t^2+1}}}{t^2+1}\, dt + \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda\sqrt{t^2+1}}}{t^2+1}\, dt$$

Найдем асимптотику каждого из интегралов.

1. К интегралу

$$I_2(\lambda) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{e^{i\lambda\sqrt{t^2+1}}}{t^2+1}\,dt$$

применим стационарной фазы. Для этого вычислим $S''(t)$:

$$S''(t) = \left(\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right)' = \frac{\sqrt{t^2+1} - t\cdot\dfrac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}}{t^2+1} = \frac{t^2+1-t^2}{(t^2+1)^{3/2}} = \frac{1}{(t^2+1)^{3/2}}$$

Поскольку

$$S''(0) = 1 > 0\,,$$

то в силу метода стационарной фазы получаем

$$I_2(\lambda) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{e^{i\lambda\sqrt{t^2+1}}}{t^2+1}\,dt = e^{i\lambda S(0)+i\pi/4}\, f(0)\,\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda\, S''(0)}} + O\!\left(\frac{1}{\lambda}\right) =$$

$$= e^{i\lambda+i\pi/4}\,\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} + O\!\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

при $\lambda\to\infty$.

2. Для того, чтобы найти асимптотику интеграла

$$I_1(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{e^{i\lambda\sqrt{t^2+1}}}{t^2+1}\,dt$$

проинтегрируем его по частям

$$I_1(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{1}{i\lambda t\sqrt{t^2+1}}\cdot\frac{i\lambda t\, e^{i\lambda\sqrt{t^2+1}}}{\sqrt{t^2+1}}\,dt = \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{1}{i\lambda t\sqrt{t^2+1}}\, d\Big(e^{i\lambda\sqrt{t^2+1}}\Big) =$$

$$= \frac{e^{i\lambda\sqrt{t^2+1}}}{i\lambda t\sqrt{t^2+1}}\Bigg|_{-\infty}^{-1} + \frac{1}{i\lambda}\int\limits_{-\infty}^{-1} e^{i\lambda\sqrt{t^2+1}}\,\frac{\sqrt{t^2+1}+t\cdot\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t^2(t^2+1)}\,dt =$$

$$= -\frac{e^{i\lambda\sqrt{2}}}{i\lambda\sqrt{2}} + \frac{1}{i\lambda}\int\limits_{-\infty}^{-1} e^{i\lambda\sqrt{t^2+1}}\,\frac{1+2t^2}{t^2(t^2+1)^{3/2}}\,dt$$

Следовательно,

$$|I_1(\lambda)| = \left| -\frac{e^{i\lambda\sqrt{2}}}{i\lambda\sqrt{2}} + \frac{1}{i\lambda} \int\limits_{-\infty}^{-1} e^{i\lambda\sqrt{t^2+1}}\, \frac{1+2t^2}{t^2(t^2+1)^{3/2}}\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{1+2t^2}{t^2(t^2+1)^{3/2}}\, dt \right)$$

В силу сходимости интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{1+2t^2}{t^2(t^2+1)^{3/2}}\, dt$$

получаем, что

$$I_1(\lambda) = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

при $\lambda \to \infty$.

3. Точно также находим асимптотику интеграла

$$I_3(\lambda) = \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda\sqrt{t^2+1}}}{t^2+1}\, dt = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

при $\lambda \to \infty$.

Таким образом,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda\sqrt{t^2+1}}}{t^2+1}\, dt = e^{i\lambda + i\pi/4}\, \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

при $\lambda \to \infty$.

Ответ. $e^{i\lambda + i\pi/4}\, \sqrt{\dfrac{2\pi}{\lambda}}$

Решим задачу Т.14 из домашнего задания.

Задача 3 *Найти главный член асимптотики при* $\lambda \to \infty$ *функции Бесселя* n *-го порядка* $(n \in \mathbb{N})$

$$J_n(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi \cos(\lambda \sin t - nt)\, dt$$

Решение.

Преобразуем функцию $J_n(\lambda)$ к виду, подходящему для применения метода стационарной фазы

$$J_n(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi \cos(\lambda \sin t - nt)\, dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi \Big(\cos(\lambda \sin t) \cos nt + \sin(\lambda \sin t) \sin nt\Big)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int\limits_0^\pi \cos nt\, e^{i\lambda \sin t}\, dt + \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int\limits_0^\pi \sin nt\, e^{i\lambda \sin t}\, dt$$

1. Рассмотрим сначала интеграл

$$I_1(\lambda) = \int\limits_0^\pi \cos nt\, e^{i\lambda \sin t}\, dt$$

Амплитуда подынтегральной функции $f(t) = \cos nt$, а фаза $S(t) = \sin t$.

Найдем стационарные точки фазы:

$$S'(t) = \cos t = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = \frac{\pi}{2}$$

Таким образом, фаза имеет на интервале $(0, \pi)$ единственную стационарную точку $t = \dfrac{\pi}{2}$.

Вычислим вторую производную фазы в этой точке

$$S''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1 < 0$$

Применяя метод стационарной фазы к интегралу $I_1(\lambda)$, получаем

$$I_1(\lambda) = \int\limits_0^\pi \cos nt \, e^{i\lambda \sin t} \, dt = e^{i\lambda S\left(\frac{\pi}{2}\right) - i\frac{\pi}{4}} \, f\left(\frac{\pi}{2}\right) \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda \, S''\left(\frac{\pi}{2}\right)}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) =$$

$$= e^{i\lambda - i\pi/4} \, \cos\frac{n\pi}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

при $\lambda \to \infty$.

2. Теперь найдем асимптотику интеграла

$$I_2(\lambda) = \int\limits_0^\pi \sin nt \, e^{i\lambda \sin t} \, dt$$

В этом случае амплитуда $f(t) = \sin nt$, а фаза $S(t) = \sin t$ – та же, что и в первом случае, с единственной стационарной точкой $t = \dfrac{\pi}{2} \in (0, \pi)$, для которой

$$S''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0$$

Применяя метод стационарной фазы к интегралу $I_2(\lambda)$, получаем

$$I_2(\lambda) = \int\limits_0^\pi \sin nt \, e^{i\lambda \sin t} \, dt = e^{i\lambda S\left(\frac{\pi}{2}\right) - i\frac{\pi}{4}} \, f\left(\frac{\pi}{2}\right) \sqrt{\frac{2\pi}{-\lambda \, S''\left(\frac{\pi}{2}\right)}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) =$$

$$= e^{i\lambda - i\pi/4} \, \sin\frac{n\pi}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

при $\lambda \to \infty$.

Следовательно,

$$J_n(\lambda) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} I_1(\lambda) + \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} I_2(\lambda) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{Re}\left(e^{i\lambda - i\pi/4} \, \cos\frac{n\pi}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}\right) + \operatorname{Im}\left(e^{i\lambda - i\pi/4} \, \sin\frac{n\pi}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}\right)\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\cos\left(\lambda - \frac{\pi}{4}\right)\ \cos\frac{n\pi}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} + \sin\left(\lambda - \frac{\pi}{4}\right)\ \sin\frac{n\pi}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi\lambda}}\cos\left(\lambda - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

при $\lambda \to \infty$.

Ответ. $\sqrt{\dfrac{2}{\pi\lambda}}\cos\left(\lambda - \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{n\pi}{2}\right)$

Наконец, решим задачу Т.15 из домашнего задания, которая вообще не требует применения метода стационарной фазы.

Задача 4 *Доказать, что*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\cos(2\lambda t)\,dt = e^{-\lambda^2}\sqrt{\pi}$$

Решение.

Поскольку интеграл

$$I(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\cos(2\lambda t)\,dt$$

является четной функцией, будем для определенности считать, что $\lambda \geqslant 0$.

Преобразуем интеграл $I(\lambda)$ к виду

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\cos(2\lambda t)\,dt = \mathrm{Re}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+i2\lambda t}\,dt = \mathrm{Re}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+i2\lambda t+\lambda^2-\lambda^2}\,dt =$$

$$= e^{-\lambda^2}\,\mathrm{Re}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(t-i\lambda\right)^2}dt = e^{-\lambda^2}\,\mathrm{Re}\int\limits_{-\infty-i\lambda}^{+\infty-i\lambda} e^{-z^2}dz$$

Для того, чтобы вычислить интеграл

$$I_1(\lambda) = \int\limits_{-\infty-i\lambda}^{+\infty-i\lambda} e^{-z^2}dz$$

рассмотрим контур γ, изображенный на рисунке 1

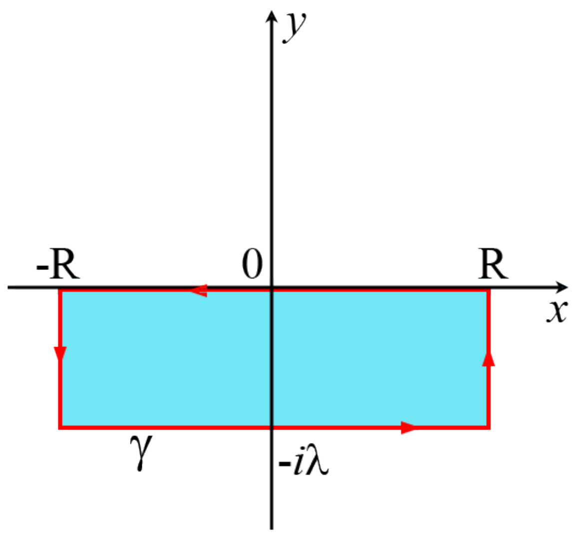

Рис. 1

Поскольку для любого R функция $f(z) = e^{-z^2}$ голоморфна внутри области, ограниченной контуром γ, то

$$\oint\limits_{\gamma} e^{-z^2} dz = 0$$

С другой стороны,

$$\oint\limits_{\gamma} e^{-z^2} dz = \int\limits_{-R-i\lambda}^{R-i\lambda} e^{-z^2} dz + \int\limits_{R-i\lambda}^{R} e^{-z^2} dz + \int\limits_{R}^{-R} e^{-z^2} dz + \int\limits_{-R}^{-R-i\lambda} e^{-z^2} dz$$

Найдем предел каждого из интегралов при $R \to +\infty$.

1. Интеграл по нижней стороне прямоугольника стремится к искомому

$$\int\limits_{-R-i\lambda}^{R-i\lambda} e^{-z^2} dz \quad \to \int\limits_{-\infty-i\lambda}^{+\infty-i\lambda} e^{-z^2} dz = I_1(\lambda)$$

2. Покажем, что интеграл по правой стороне прямоугольника стремится к нулю. Действительно,

$$\left| \int\limits_{R-i\lambda}^{R} e^{-z^2} dz \right| = \left| \int\limits_{-\lambda}^{0} e^{-(R+is)^2} ds \right| \leqslant \int\limits_{-\lambda}^{0} e^{-R^2+s^2} ds \leqslant \lambda e^{-R^2+\lambda^2} \to 0$$

при $R \to +\infty$.

3. Интеграл по верхней стороне прямоугольника стремится к интегралу Пуассона, взятому со знаком минус

$$\int\limits_{R}^{-R} e^{-z^2} dz \quad \to -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds = -\sqrt{\pi}$$

4. Интеграл по левой стороне прямоугольника стремится к нулю. Доказательство почти дословно повторяет доказательство, проведенное в пункте 2.

Таким образом,

$$I_1(\lambda) = \int\limits_{-\infty-i\lambda}^{+\infty-i\lambda} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$$

Следовательно,

$$I(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cos(2\lambda t)\, dt = e^{-\lambda^2} \operatorname{Re} I_1(\lambda) = e^{-\lambda^2} \sqrt{\pi}$$

Доказано.

Спасибо за внимание.
Не болейте!