Исследование функций с помощью производных. Построение графиков (часть 2)

Самарова С.С.

Учебное пособие для дистанционных занятий по дисциплине «Введение в математический анализ»

1 курс

Мы продолжаем построение графиков функций на основе исследования их свойств с помощью производных и построим графики более сложных функций, содержащих радикалы.

Начнем с решения задачи из экзаменационной контрольной работы 2017/2018 учебного года.

Задача 1 *Построить график функции*

$$y = \sqrt[3]{x^2(x+9)} \tag{1}$$

Решение.

1. Область определения

Областью определения функции (1) является вся числовая прямая.

2. Четность

Функция (1) не является ни четной, ни нечетной.

3. Периодичность

Функция (1) не является периодической.

4. Асимптоты

Поскольку функция (1) определена на всей числовой оси, то вертикальных асимптот у нее нет.

Выясним, есть ли у функции

$$y = \sqrt[3]{x^2(x+9)}$$

наклонные асимптоты. Для этого, воспользовавшись разложением бинома по формуле Маклорена, преобразуем функцию к виду

$$y = \sqrt[3]{x^2(x+9)} = x\sqrt[3]{1+\frac{9}{x}} = x\left(1+\frac{3}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x+3+o(1) \quad \text{при} \quad x \to \pm\infty$$

Таким образом, прямая $y = x + 3$ является наклонной асимптотой графика функции

$$y = \sqrt[3]{x^2(x+9)}$$

как при $x \to -\infty$, так и при $x \to +\infty$.

Изобразим асимптоту $y = x + 3$ на рисунке 1.

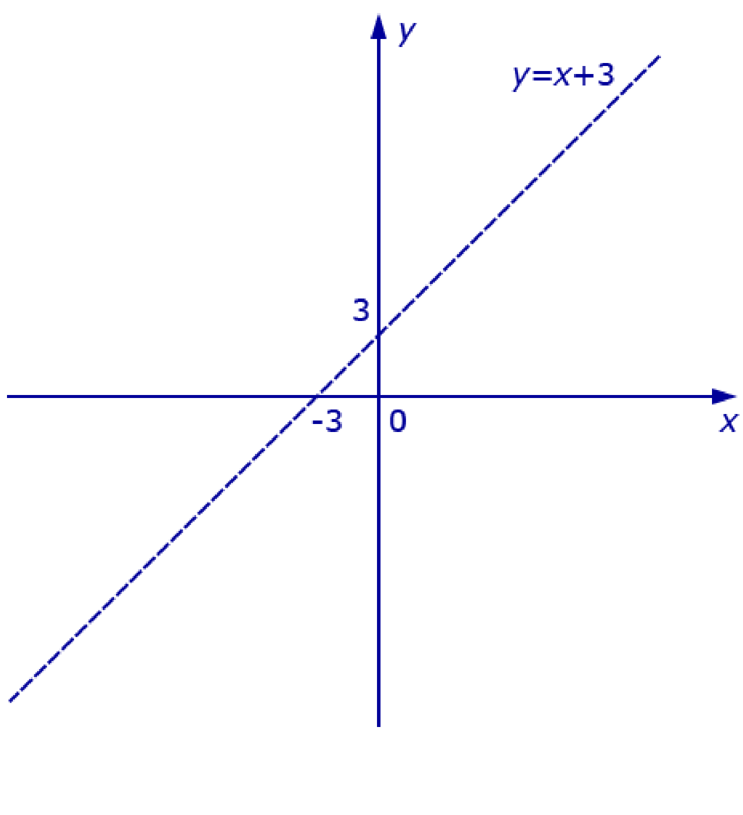


Рис. 1

5. Интервалы возрастания и убывания, экстремумы

Вычислим производную

$$y' = \left(\sqrt[3]{x^2(x+9)}\right)' = \left(x^{\frac{2}{3}}(x+9)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{2}{3}\,x^{-\frac{1}{3}}(x+9)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\,(x+9)^{-\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}} =$$

$$= \frac{1}{3}\,x^{-\frac{1}{3}}(x+9)^{-\frac{2}{3}}\big(2(x+9)+x\big) = x^{-\frac{1}{3}}(x+9)^{-\frac{2}{3}}(x+6) \qquad (2)$$

Критическими точками функции

$$y(x) = \sqrt[3]{x^2(x+9)}$$

являются: точка $x=-6$, в которой производная $y'(x)$ равна нулю, а также точки $x=0$ и $x=-9$, в которых производная $y'(x)$ не существует.

Изобразим на рисунке 2 диаграмму знаков производной $y'(x)$.

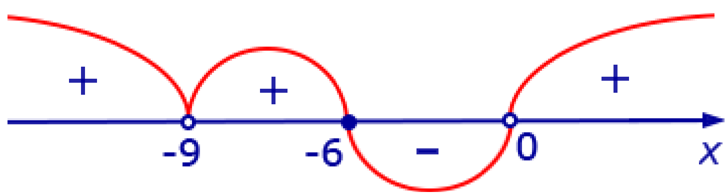


Рис. 2

На интервалах $(-\infty,-9)$, $(-9,-6)$ и $(0,+\infty)$ производная $y'(x)$ положительна, значит, функция $y(x)$ возрастает на этих интервалах. На интервале $(-6,0)$ производная $y'(x)$ отрицательна, значит, функция $y(x)$ убывает на этом интервале. Схематически поведение функции $y(x)$ изображено на рисунке 3.

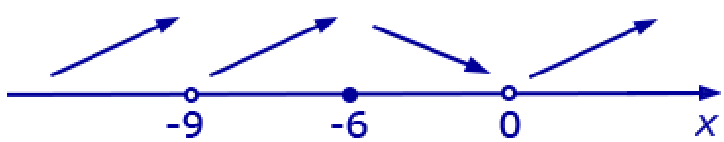


Рис. 3

При переходе через точку $x = -6$ производная функции $y'(x)$ меняет знак с «+» на «−» . Следовательно, точка $x = -6$ является точкой строгого максимума функции $y(x)$.

Найдем значение функции в точке максимума $x = -6$:

$$y(-6) = \sqrt[3]{36 \cdot 3} = 3\sqrt[3]{4}$$

Поскольку $y'(-6) = 0,$ то касательная в этой точке горизонтальная.

При переходе через точку $x = 0$ производная функции $y'(x)$ меняет знак с «−» на «+» . Следовательно, точка $x = 0$ является точкой строгого минимума функции $y(x)$.

Найдем значение функции в точке минимума $x = 0$:

$$y(0) = 0$$

Поскольку $y'(x) \to \infty$ при $x \to 0,$ то касательная в этой точке вертикальная.

6. Направление выпуклости, точки перегиба

Найдем интервалы, на которых функция

$$y(x) = \sqrt[3]{x^2(x+9)}$$

сохраняет направление выпуклости, и найдем точки перегиба (если они есть). Для этого вычислим вторую производную функции $y(x)$, воспользовавшись найденной ранее первой производной $y'(x)$ (формула (2))

$$y'' = \left(x^{-\frac{1}{3}}(x+9)^{-\frac{2}{3}}(x+6)\right)' =$$

$$= -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}(x+9)^{-\frac{2}{3}}(x+6) - \frac{2}{3}(x+9)^{-\frac{5}{3}}x^{-\frac{1}{3}}(x+6) + x^{-\frac{1}{3}}(x+9)^{-\frac{2}{3}} =$$

$$= -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}(x+9)^{-\frac{5}{3}}\Big((x+9)(x+6) + 2x(x+6) - 3x(x+9)\Big) =$$

$$= -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}(x+9)^{-\frac{5}{3}}(x^2 + 9x + 6x + 54 + 2x^2 + 12x - 3x^2 - 27x) =$$

$$= -18x^{-\frac{4}{3}}(x+9)^{-\frac{5}{3}}$$

Изобразим диаграмму знаков второй производной y'' (рис. 4)

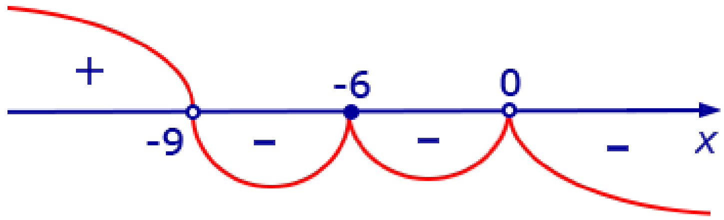


Рис. 4

При переходе через точку $x = -9$ вторая производная функции y'' меняет знак с «+» на «−» . Следовательно, $x = -9$ – точка перегиба графика функции $y(x)$.

Найдем значение функции $y(x)$ в точке перегиба

$$y(-9) = 0$$

Поскольку $y'(x) \to \infty$ при $x \to -9,$ то касательная в этой точке вертикальная.

Значит, $x = -9$ – точка перегиба с вертикальной касательной.

При $x < -9$ функция $y(x)$ выпукла вниз, при $x > -9$ функция $y(x)$ выпукла вверх.

Дополним схему поведения функции, представленную на рисунке 4, данными о направлении выпуклости функции (рис. 5).

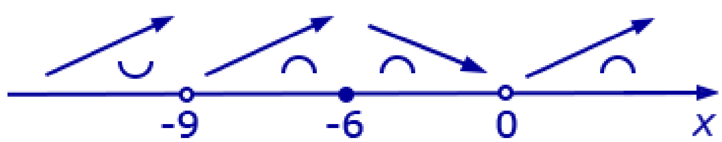


Рис. 5

7. Точки пересечения графика функции с осями координат

Для рассматриваемой функции

$$y(x) = \sqrt[3]{x^2(x+9)}$$

- точки $(-9; 0)$ и $(0; 0)$ являются точками пересечения графика функции с осью Ox,

- точка $(0;0)$ является точкой пересечения графика функции с осью Oy.

Добавим на схему поведения функции, изображенную на рис. 5, информацию о знаках функции (рис. 6).

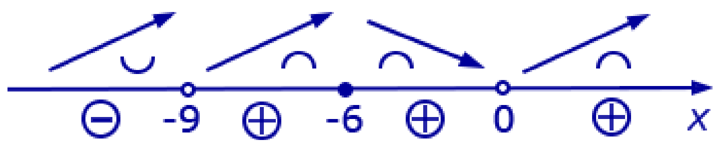


Рис. 6

В результате на рис. 6 в схематической форме представлен большой объем данных о свойствах функции

$$y(x) = \sqrt[3]{x^2(x+9)}$$

8. График функции

Приступим к построению графика функции. Для этого будем дополнять рис. 1, рассматривая по очереди интервалы с однотипным поведением функции.

Рассмотрим сначала интервал $(-\infty, -9)$.

Как мы выяснили ранее, при $x \to -\infty$ график функции имеет асимптоту $y = x + 3$.

Из схемы на рисунке 6 видно, что на интервале $(-\infty, -9)$ функция принимает отрицательные значения и растет из $-\infty$ до 0, оставаясь выпуклой вниз. Это означает, что при $x \to -\infty$ график функции приближается к наклонной асимптоте $y = x + 3$ сверху.

Как мы выяснили ранее, в точке $(-9\,;\,0)$ касательная вертикальна. Это нужно постараться изобразить на графике.

Теперь изобразим участок $(-\infty, -9)$ на графике (рис. 7)

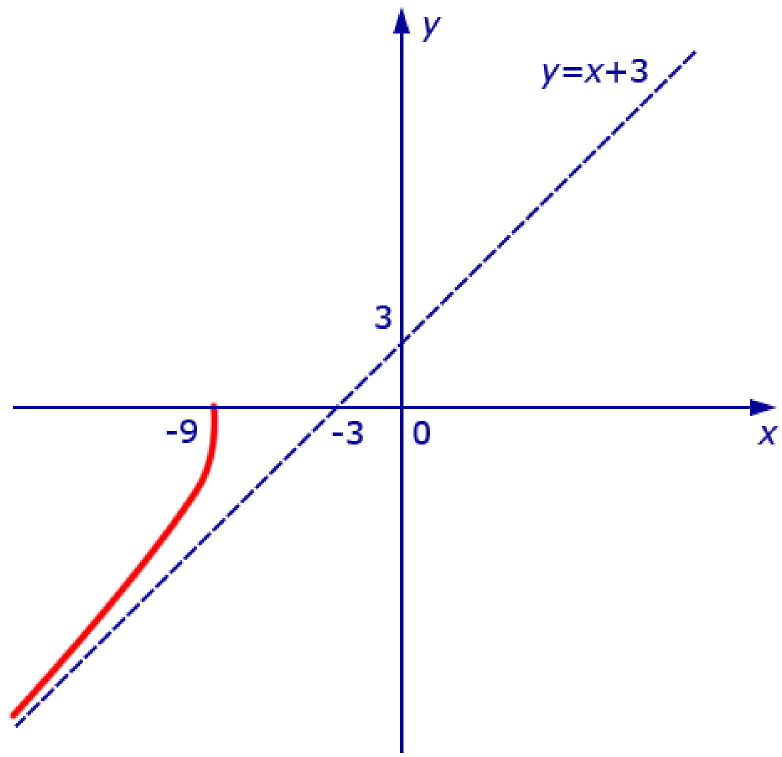
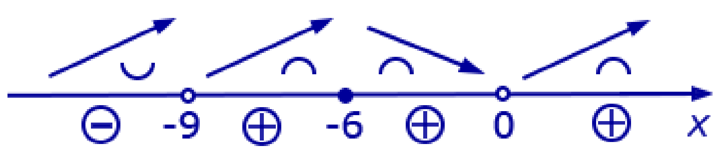


Рис. 7

В точке перегиба $(-9\,;\,0)$ с вертикальной касательной изменяется направление выпуклости графика, функция продолжает расти.

Рассмотрим интервал $(-9, -6)$. Из схемы на рисунке 6 (приводим её ещё раз)



видно, что на интервале $(-9, -6)$ функция принимает положительные значения и растет от 0 до $3\sqrt[3]{4}$, оставаясь выпуклой вверх. Изобразим этот участок на графике (рис. 8)

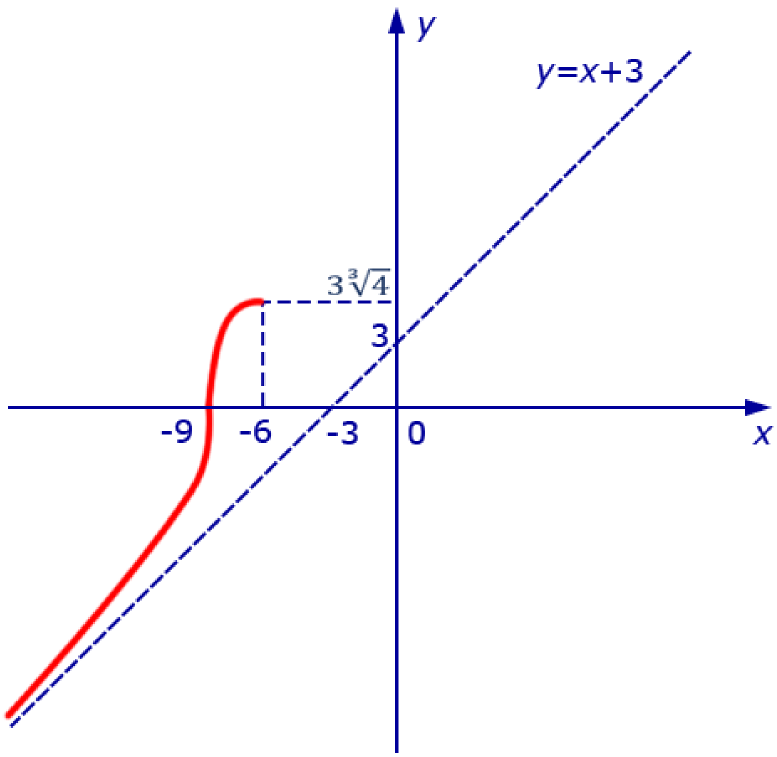
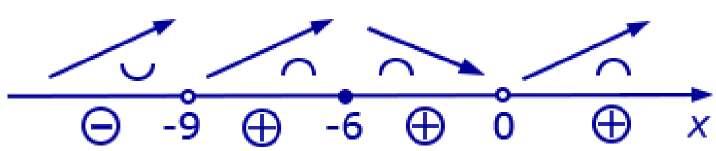


Рис. 8

В точке $x = -6$ функция достигает локального максимума с горизонтальной касательной. Справа от этой точки функция будет убывать.

Теперь перейдем к интервалу $(-6, 0)$. Из схемы на рисунке 6



видим, что на интервале $(-6, 0)$ функция принимает положительные значения и убывает от $3\sqrt[3]{4}$ до 0, оставаясь выпуклой вверх. В точке $(0; 0)$ касательная вертикальна.

Изобразим этот участок на графике (рис. 9)

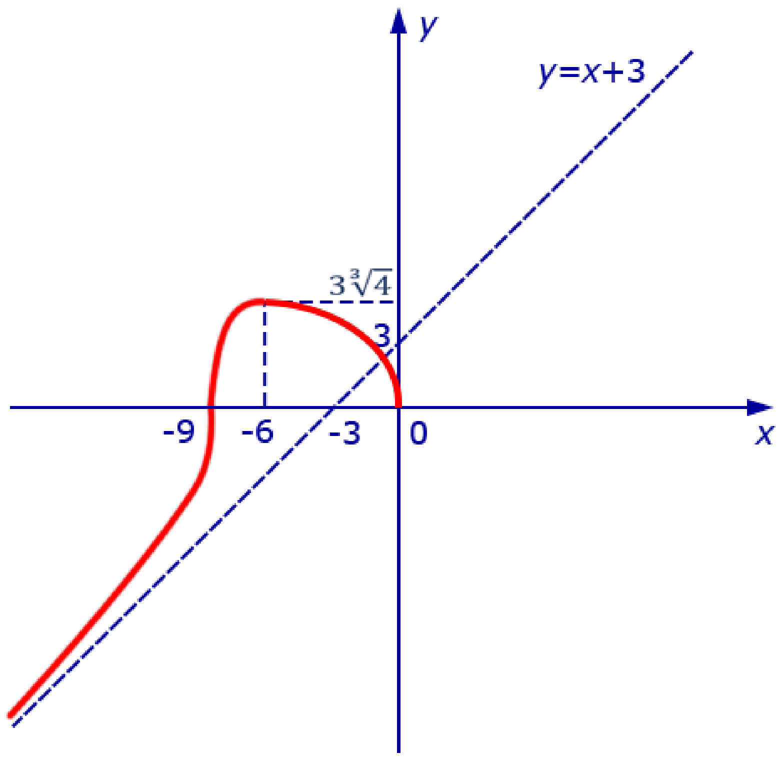
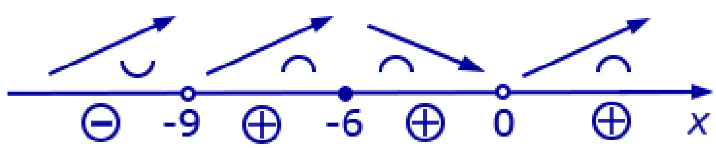


Рис. 9

В точке $x = 0$ функция достигает локального минимума с вертикальной касательной. Справа от этой точки функция будет расти.

И, наконец, рассмотрим последний интервал $(0, +\infty)$. В соответствии со схемой на рисунке 6



на интервале $(0, +\infty)$ функция принимает положительные значения, возрастает от 0 до $+\infty$, выпукла вверх. Исходя из направления выпуклости на этом участке делаем вывод, что при $x \to +\infty$ график функции приближается к наклонной асимптоте $y = x + 3$ снизу. Изображаем этот участок и получаем окончательный график (рис.10).

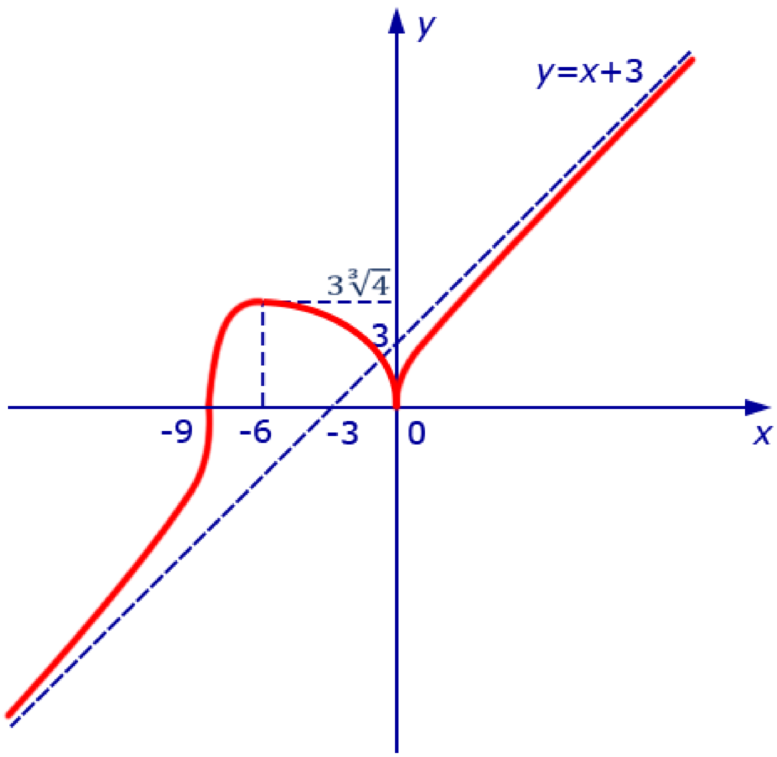


Рис. 10

Решим ещё одну задачу на построение графика функции (экзаменационная контрольная 2016/2017 уч. г.)

Задача 2 *Построить график функции*

$$y = x - \sqrt{|x^2 - 4|} \tag{3}$$

Решение.

1. Область определения

Областью определения функции (3) является вся числовая прямая.

2. Четность

Функция (3) не является ни четной, ни нечетной.

3. Периодичность

Функция (3) не является периодической.

4. Асимптоты

Поскольку функция (3) определена на всей числовой оси, то вертикальных асимптот у нее нет.

Выясним, есть ли у функции

$$y = x - \sqrt{|x^2 - 4|}$$

наклонные асимптоты. Для этого снова воспользуемся разложением бинома по формуле Маклорена.

При $x \to -\infty$ получаем

$$y = x - \sqrt{x^2 - 4} = x - |x|\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} = x + x\left(1 - \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = 2x - \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Таким образом, прямая $y = 2x$ является наклонной асимптотой графика функции

$$y = x - \sqrt{|x^2 - 4|}$$

при $x \to -\infty$. Более того, поскольку при $x \to -\infty$ справедливо неравенство

$$-\frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) > 0,$$

то график приближается к асимптоте $y = 2x$ сверху.

При $x \to +\infty$ получаем

$$y = x - \sqrt{x^2 - 4} = x - |x|\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} = x - x\left(1 - \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Таким образом, прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой графика функции

$$y = x - \sqrt{|x^2 - 4|}$$

при $x \to +\infty$. Поскольку при $x \to +\infty$ справедливо неравенство

$$\frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) > 0,$$

то график приближается к асимптоте $y = 0$ сверху.

Изобразим асимптоты графика функции на рисунке 11.

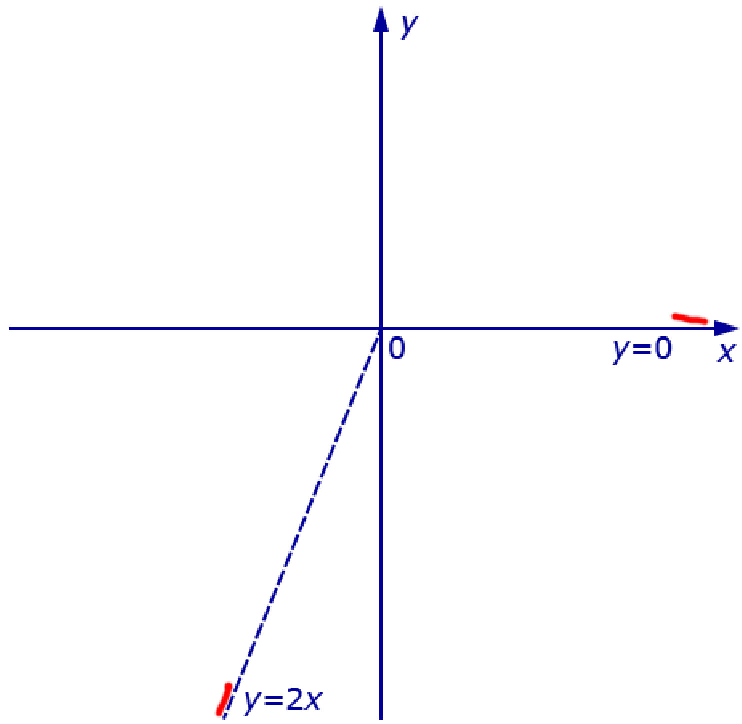


Рис. 11

5. Интервалы возрастания и убывания, экстремумы

Вычислим производную $y'(x)$:

- при $|x| > 2$

$$y' = \left(x - \sqrt{x^2 - 4}\right)' = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

- при $|x| < 2$

$$y' = \left(x - \sqrt{4 - x^2}\right)' = 1 - \frac{(-x)}{\sqrt{4 - x^2}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

Найдем промежутки, на которых производная сохраняет постоянный знак. Для этого решим неравенство

$$y'(x) > 0$$

- При $|x| > 2$ получаем

$$1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} > 0$$

$$\sqrt{x^2-4} > x \tag{4}$$

При всех $x \in (-\infty, -2)$ неравенство (4) выполнено, а при $x \in (2, +\infty)$ неравенство (4) равносильно неравенству

$$x^2 - 4 > x^2\,,$$

у которого решений нет.

Таким образом, в рассматриваемом случае $y'(x) > 0$ при $x \in (-\infty, -2)$ и $y'(x) < 0$ при $x \in (2, +\infty)$.

- При $|x| < 2$ получаем

$$1 + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} > 0$$

$$\sqrt{4-x^2} > -x \tag{5}$$

При всех $x \in [0, 2)$ неравенство (4) выполнено, а при $x \in (-2, 0)$ неравенство (5) равносильно неравенству

$$4 - x^2 > x^2,$$

$$x^2 < 2,$$

$$x \in (-\sqrt{2},\ \sqrt{2}).$$

С учетом условия $x \in (-2, 0)$ получаем, что $y'(x) > 0$ при $x \in (-\sqrt{2}, 0)$.

Таким образом, в рассматриваемом случае $y'(x) > 0$ при $x \in (-\sqrt{2}, 2)$ и $y'(x) < 0$ при $x \in (-2, -\sqrt{2})$.

- Производная $y'(x)$ равна нулю при $x = -\sqrt{2}$ и не существует при $x = \pm 2$.

Изобразим на рисунке 12 диаграмму знаков производной $y'(x)$ в целом.

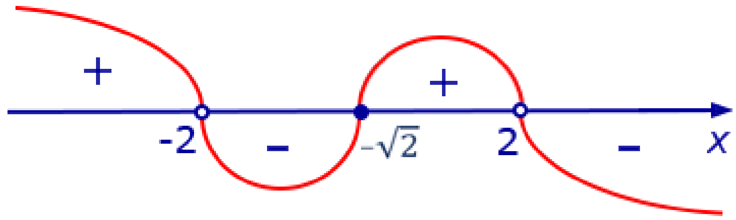


Рис. 12

На интервалах $(-\infty, -2)$ и $(-\sqrt{2}, 2)$ производная $y'(x)$ положительна, значит, функция $y(x)$ возрастает на этих интервалах. На интервалах $(-2, -\sqrt{2})$ и $(2, +\infty)$ производная $y'(x)$ отрицательна, значит, функция $y(x)$ убывает на этих интервалах.

Схематически поведение функции $y(x)$ изображено на рисунке 13.

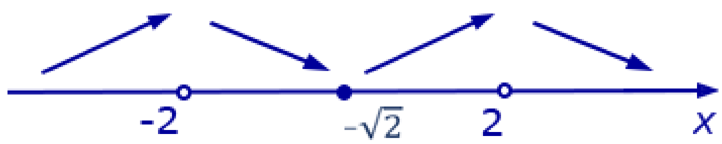


Рис. 13

- При переходе через точку $x = -2$ производная функции $y'(x)$ меняет знак с «+» на «−». Следовательно, точка $x = -2$ является точкой строгого максимума функции $y(x)$.

  Найдем значение функции в точке максимума $x = -2$:

$$y(-2) = -2$$

  Поскольку $y'(x) \to \infty$ при $x \to -2$, то касательная в этой точке вертикальная.

- При переходе через точку $x = -\sqrt{2}$ производная функции $y'(x)$ меняет знак с «−» на «+». Следовательно, точка $x = -\sqrt{2}$ является точкой строгого минимума функции $y(x)$.

  Найдем значение функции в точке минимума $x = -\sqrt{2}$:

$$y(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2} - \sqrt{|2-4|} = -2\sqrt{2}$$

Поскольку $y'(-\sqrt{2}) = 0$, то касательная в этой точке горизонтальная.

- При переходе через точку $x = 2$ производная функции $y'(x)$ меняет знак с «+» на «−». Следовательно, точка $x = -2$ является точкой строгого максимума функции $y(x)$.

  Найдем значение функции в точке максимума $x = 2$:

$$y(2) = 2$$

  Поскольку $y'(x) \to \infty$ при $x \to 2$, то касательная в этой точке вертикальная.

6. Направление выпуклости, точки перегиба

Найдем интервалы, на которых функция

$$y(x) = x - \sqrt{|x^2 - 4|}$$

сохраняет направление выпуклости, и найдем точки перегиба (если они есть). Для этого вычислим вторую производную функции $y(x)$.

- при $|x| > 2$

$$y'' = \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\right)' = -\frac{\sqrt{x^2-4} - x \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}}{x^2-4} = \frac{4}{(x^2-4)^{\frac{3}{2}}}$$

- при $|x| < 2$

$$y'' = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right)' = \frac{\sqrt{4-x^2} - x \cdot \dfrac{(-x)}{\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2} = \frac{4}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Таким образом, $y''(x)$ положительна при всех значениях $x \in (-\infty, +\infty)$. Следовательно, функция $y(x)$ на всех интервалах является выпуклой вниз. Точек перегиба у нее нет.

Дополним схему поведения функции, представленную на рисунке 13, данными о направлении выпуклости функции (рис. 14).

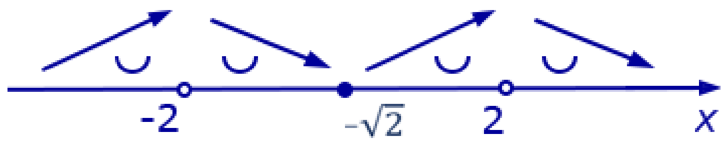


Рис. 14

7. Промежутки, на которых функция сохраняет постоянный знак, точки пересечения графика функции с осями координат

Для рассматриваемой функции

$$y(x) = x - \sqrt{|x^2 - 4|}$$

найдем интервалы, на которых функция положительна. Для этого решим неравенство

$$x - \sqrt{|x^2 - 4|} > 0$$

$$x > \sqrt{|x^2 - 4|}$$

Поскольку квадратный корень неотрицателен, то при $x < 0$ данное неравенство решений не имеет. В случае $x \geqslant 0$ получаем

$$x^2 > |x^2 - 4|$$

- При $x \geqslant 2$ неравенство принимает вид

$$x^2 > x^2 - 4$$

Следовательно, все $x \in (2, +\infty)$ являются его решениями.

- При $0 \leqslant x < 2$ находим

$$x^2 > 4 - x^2$$

$$x^2 > 2$$

$$x > \sqrt{2}$$

Таким образом, в этом случае решениями неравенства будут $x \in (\sqrt{2}, 2]$.

Объединяя вместе оба случая, получаем, что рассматриваемая функция положительна при $x \in (\sqrt{2}, +\infty)$ и, соответственно, отрицательна при $x \in (-\infty, \sqrt{2})$.

- Точка $(\sqrt{2}; 0)$ является единственной точкой пересечения графика функции с осью Ox,
- точка $(-2; 0)$ является точкой пересечения графика функции с осью Oy.

Добавим на схему поведения функции, изображенную на рис. 14, информацию о знаках функции (рис. 15).

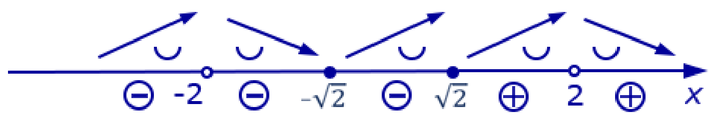


Рис. 15

В результате на рис. 15 в схематической форме представлен большой объем данных о свойствах функции

$$y(x) = x - \sqrt{|x^2 - 4|}$$

8. График функции

Приступим к построению графика функции. Для этого будем дополнять рис. 11, рассматривая по очереди интервалы с однотипным поведением функции.

Рассмотрим сначала интервал $(-\infty, -2)$.

Как мы выяснили ранее, при $x \to -\infty$ график функции имеет наклонную асимптоту $y = 2x$, причем приближается к асимптоте сверху.

Из схемы на рисунке 15 видно, что на интервале $(-\infty, -2)$ функция принимает отрицательные значения и растет из $-\infty$ до -2, оставаясь выпуклой вниз.

В точке $(-2\,; -2)$ касательная вертикальна.

Теперь изобразим участок $(-\infty, -9)$ на графике (рис. 16)

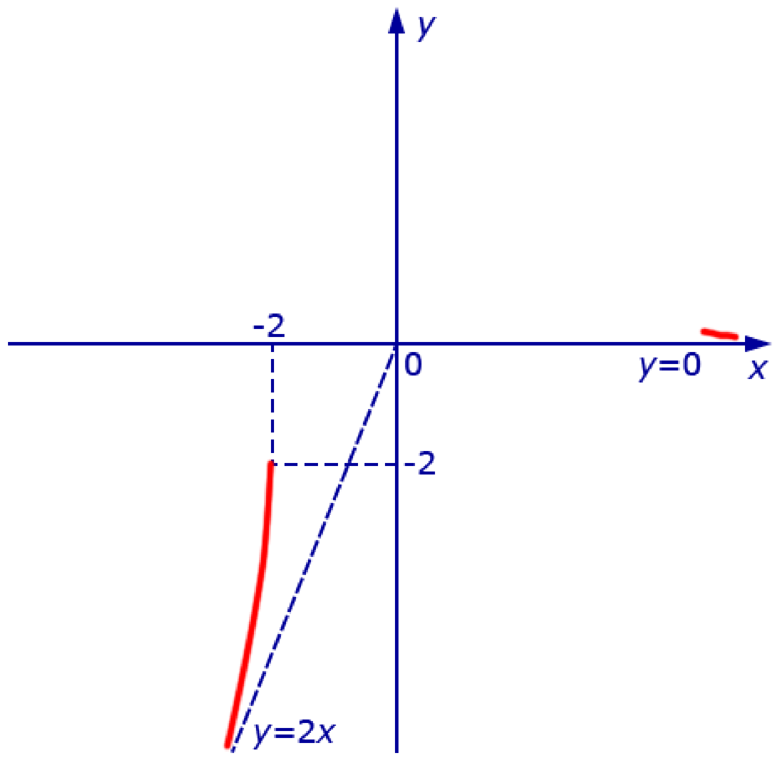
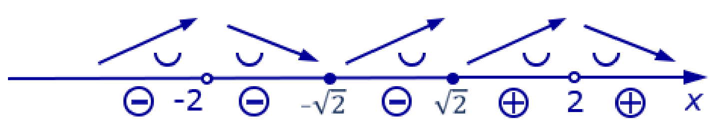


Рис. 16

В точке $x=-2$ функция достигает локального максимума с вертикальной касательной. Справа от этой точки функция будет убывать.

Рассмотрим интервал $(-2,-\sqrt{2})$. Из схемы на рисунке 15 (приводим её ещё раз)



видно, что на интервале $(-2,-\sqrt{2})$ функция принимает отрицательные значения и убывает от -2 до $-2\sqrt{2}$, оставаясь выпуклой вниз. В точке $(-2\,;\,-2\sqrt{2})$ касательная горизонтальна. Изобразим этот участок на графике (рис. 17)

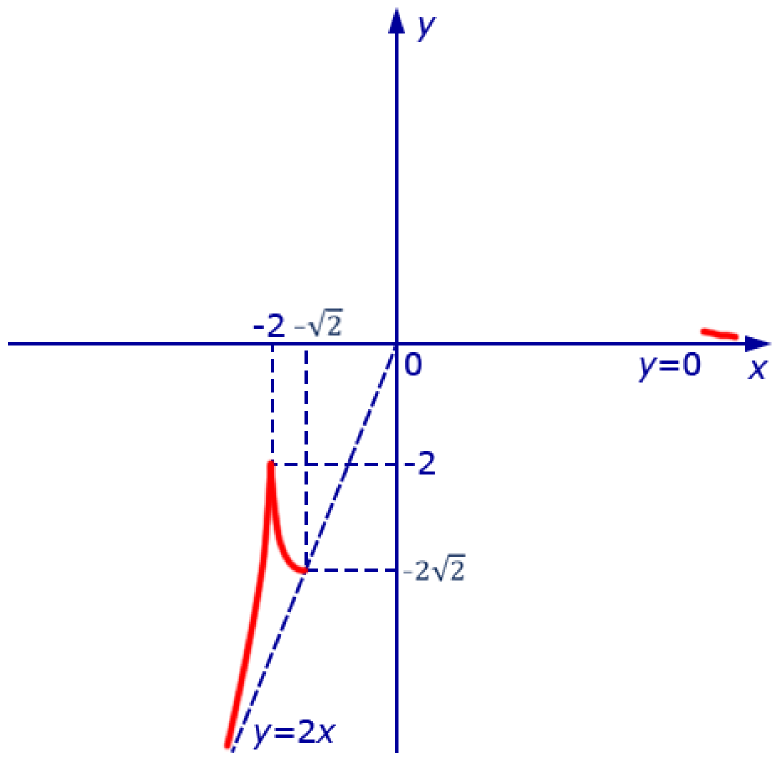
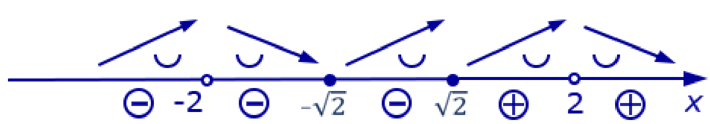


Рис. 17

В точке $x = -\sqrt{2}$ функция достигает локального минимума с горизонтальной касательной. Справа от этой точки функция будет расти.

Теперь перейдем к интервалу $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Из схемы на рисунке 15



видим, что на интервале $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ функция принимает отрицательные значения и растет от $-2\sqrt{2}$ до 0, оставаясь выпуклой вниз. В точке $(\sqrt{2};\ ,0)$ функция пересекает ось Ox.

Изобразим этот участок на графике (рис. 18)

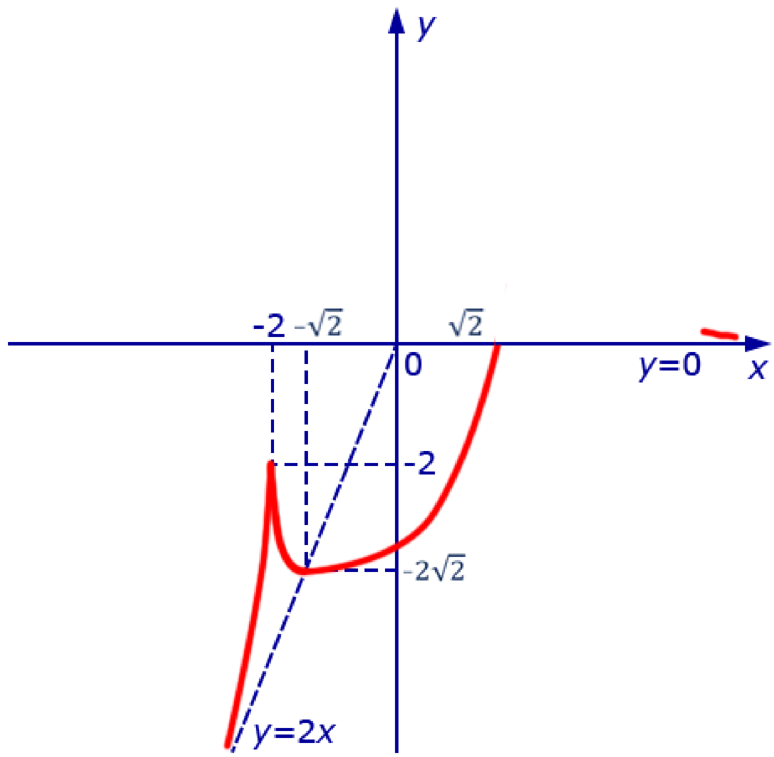
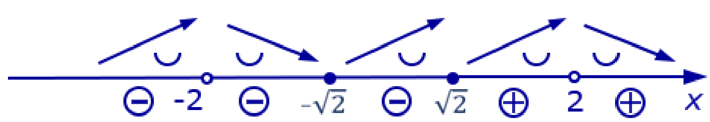


Рис. 18

На интервале $(\sqrt{2}, 2)$ функция продолжает расти. Из схемы на рисунке 15



видим, что на интервале $(\sqrt{2}, 2)$ функция принимает положительные значения и растет от 0 до 2, оставаясь выпуклой вниз. В точке $(2; ,2)$ касательная вертикальна.

Изобразим этот участок на графике (рис. 19)

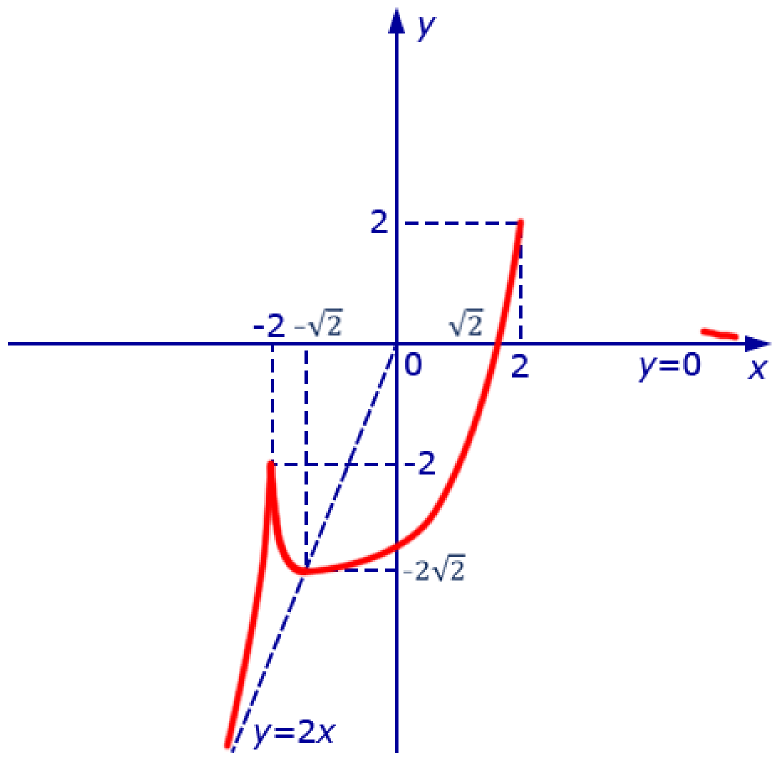
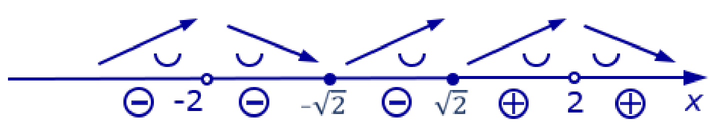


Рис. 19

В точке $x = 2$ функция достигает локального максимума с вертикальной касательной. Справа от этой точки функция убывает.

И, наконец, рассмотрим последний интервал $(2, +\infty)$. В соответствии со схемой на рисунке 15



на интервале $(2, +\infty)$ функция принимает положительные значения, убывает от 2 до 0, выпукла вниз. При $x \to +\infty$ график функции приближается к горизонтальной асимптоте $y = 0$ сверху. Изображаем этот участок и получаем окончательный график (рис.20).

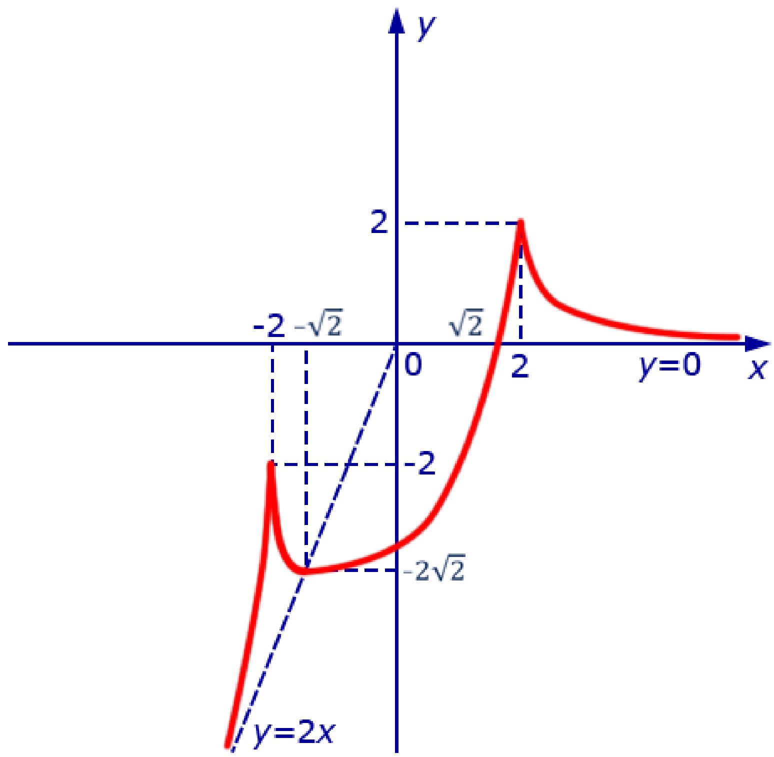


Рис. 20

На этом мы заканчиваем тему «Построение графиков функций».

Спасибо за внимание.
Не болейте!