Исследование функций с помощью производных. Построение графиков (часть 1)

Самарова С.С.

Учебное пособие для дистанционных занятий по дисциплине «Введение в математический анализ»

1 курс

Пособие посвящено применению производных для поиска интервалов возрастания и убывания функций, исследования функций на выпуклость, нахождения экстремумов функций и точек перегиба. Конечной целью является построение графиков функций на основе исследования их свойств, проведенного с помощью производных.

Необходимые теоретические сведения выделены в тексте серым фоном.

Схема исследования поведения функций, применяемая для построения их графиков

Для построения графика функции $y = f(x)$ необходимо провести исследование поведения функции по следующей схеме:

1. Найти область определения $D(f)$.

2. Выяснить, является ли функция $f(x)$ четной или нечетной.

   В случае, если $f(x)$ оказалась четной, то её график достаточно построить для $x \geqslant 0$, а затем симметрично отразить его относительно оси Oy.

В случае, если $f(x)$ оказалась нечетной, то её график достаточно построить для $x \geqslant 0$, а затем симметрично отразить его относительно начала координат.

3. Выяснить, является ли функция $f(x)$ периодической.

   В случае, если $f(x)$ оказалась периодической, достаточно построить график на одном периоде, а затем сдвигать построенный график вправо и влево.

4. Найти асимптоты графика функции.

   Для многих функций существуют прямые, к которым графики функций неограниченно приближаются. Такие прямые называют асимптотами. Их точное определение и способы их поиска мы приведем чуть позже на примере построения конкретного графика.

   Как мы увидим далее, асимптоты бывают вертикальными, горизонтальными и наклонными.

5. Вычислить производную функции $f'(x)$ и с помощью производной найти критические точки, интервалы возрастания и убывания, экстремумы функции $f(x)$. Если в точке экстремума производная не существует, то нужно указать тангенсы углов наклона касательных справа и слева.

6. Вычислить вторую производную функции $f''(x)$ и с помощью второй производной найти интервалы, на которых функция $f(x)$ выпукла вверх, интервалы, на которых функция $f(x)$ выпукла вниз, и точки перегиба графика функции $y = f(x)$. В точках перегиба необходимо указать тангенс угла наклона касательной.

7. Найти, если возможно, точки пересечения графика функции $f(x)$ с осями координат.

8. Построить график функции, согласованный с результатами проведенного исследования.

Замечание 1. Желательно схематически изображать на числовой оси поведение функции параллельно с проведением исследования её свойств по описанному выше плану.

Продемонстрируем применение описанной схемы на примере решения задачи из экзаменационной контрольной работы.

Задача 1 *Построить график функции*

$$y = \frac{(x+1)^3}{x^2} \tag{1}$$

Решение.

1. Область определения

Областью определения функции (1) является вся числовая прямая, за исключением точки $x = 0,$, то есть $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

2. Четность

Функция (1) не является ни четной, ни нечетной.

3. Периодичность

Функция (1) не является периодической.

4. Асимптоты

Вертикальные асимптоты

Определение 1 *Прямую* $x = x_0$ *называют вертикальной асимптотой графика функции* $y = f(x)$ *при* $x \to x_0$ *справа, если функция* $f(x)$ *определена на некотором интервале* (x_0, b) *и существует предел*

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$$

Определение 2 *Прямую* $x = x_0$ *называют вертикальной асимптотой графика функции* $y = f(x)$ *при* $x \to x_0$ *слева, если функция* $f(x)$ *определена на некотором интервале* (a, x_0) *и существует предел*

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$$

Поскольку при $x \to 0$

$$\lim_{x \to +0} \frac{(x+1)^3}{x^2} = +\infty \qquad \text{и} \qquad \lim_{x \to -0} \frac{(x+1)^3}{x^2} = +\infty$$

то прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой графика функции

$$y = \frac{(x+1)^3}{x^2}$$

как справа, так и слева. Изобразим эту асимптоту на рисунке 1

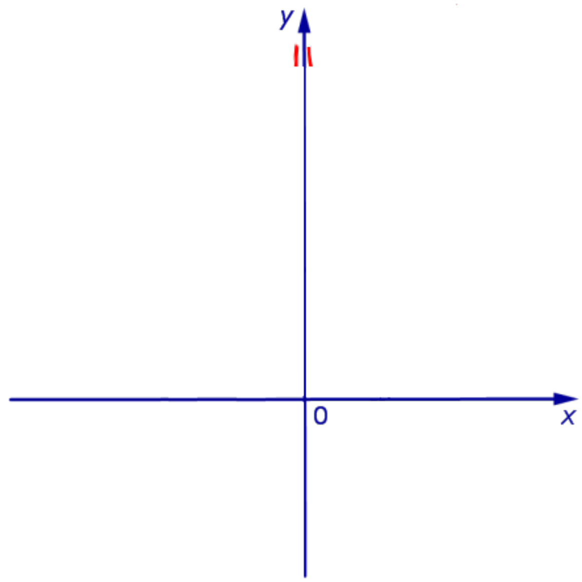


Рис. 1

Наклонные асимптоты

Определение 3 *Прямую* $y = kx+b$ *называют наклонной асимптотой графика функции* $y = f(x)$ *при* $x \to +\infty$ *, если функция* $f(x)$ *определена на некотором интервале* $(a, +\infty)$ *и существует предел*

$$\lim_{x\to+\infty} \big\{ f(x) - (kx+b) \big\} = 0$$

Определение 4 *Прямую* $y = kx+b$ *называют наклонной асимптотой графика функции* $y = f(x)$ *при* $x \to -\infty$ *, если функция* $f(x)$ *определена на некотором интервале* $(-\infty, b)$ *и существует предел*

$$\lim_{x\to-\infty} \big\{ f(x) - (kx+b) \big\} = 0$$

Горизонтальные асимптоты $y = b$ являются частным случаем наклонных асимптот $y = kx + b$, когда угловой коэффициент $k = 0$.

Поиск наклонных асимптот графиков функций

Существует несколько способов поиска наклонных асимптот.

Способ 1.

Для того, чтобы найти наклонную асимптоту $y = kx + b$ графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ (или убедиться, что наклонной асимптоты при $x \to +\infty$ не существует), нужно совершить 2 операции:

- Найти k, вычислив предел
$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \tag{2}$$
Если предел (2) не существует или существует, но равен ∞, то делаем вывод о том, что у графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ наклонных асимптот нет.

- Найти b, вычислив предел
$$b = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - kx\big) \tag{3}$$
Если предел (3) не существует или существует, но равен ∞, то делаем вывод о том, что у графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ наклонных асимптот нет.

Совершенно аналогично поступаем для того, чтобы найти наклонную асимптоту графика функции $y = f(x)$ при $x \to -\infty$ или убедиться, что наклонной асимптоты при $x \to -\infty$ не существует.

Выясним с помощью способа 1, имеются ли наклонные асимптоты у графика функции
$$y = \frac{(x+1)^3}{x^2}$$
Для этого сначала исследуем случай $x \to +\infty$

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^3}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3 = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - kx\big) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{(x+1)^3}{x^2} - x\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \left(3 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 3$$

Таким образом, прямая $y = x + 3$ является наклонной асимптотой графика функции

$$y = \frac{(x+1)^3}{x^2}$$

при $x \to +\infty$.

Точно так же исследуем случай $x \to -\infty$

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{(x+1)^3}{x^3} = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3 = 1$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} \big(f(x) - kx\big) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{(x+1)^3}{x^2} - x\right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \left(3 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 3$$

Таким образом, прямая $y = x + 3$ является наклонной асимптотой графика функции

$$y = \frac{(x+1)^3}{x^2}$$

при $x \to -\infty$.

Способ 2.

В случае, если существует предел производной $f'(x)$ при $x \to +\infty$, то

$$k = \lim_{x \to +\infty} f'(x)$$

Правда, если такого конечного предела не существует, то это не гарантирует того, что наклонная асимптота не существует.
Далее, как и в способе 1, находим

$$b = \lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - kx\big)$$

Полностью аналогично поступаем и при $x \to -\infty$.

Проиллюстрируем способ 2 на примере поиска наклонной асимптоты графика функции

$$y = \frac{(x+1)^3}{x^2}$$

при $x \to +\infty$.

С этой целью вычислим производную

$$y' = \left(\frac{(x+1)^3}{x^2}\right)' = \frac{3(x+1)^2x^2 - 2x(x+1)^3}{x^4} =$$

$$= \frac{(x+1)^2\big(3x - 2(x+1)\big)}{x^3} = \frac{(x+1)^2(x-2)}{x^3} \tag{4}$$

Замечание 2. При вычислении производной надо стараться по возможности не раскрывать скобки, так как в дальнейшем нам потребуется исследовать знаки производной и ее придется раскладывать на множители.

Найдем предел производной

$$k = \lim_{x\to+\infty} y' = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^2(x-2)}{x^3} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^2\left(1-\frac{2}{x}\right) = 1$$

что совпадает с результатом, полученным при способе 1. Далее, как и в способе 1, находим

$$b = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{(x+1)^3}{x^2} - x\right) = 3$$

и получаем асимптоту $y = x + 3$ при $x \to +\infty$.

<u>Способ 3</u>.
Наиболее эффективным является способ, при котором нужно представить функцию $y = f(x)$ в виде

$$y = kx + b + o(1)$$

при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$).
Можно использовать для этого любые доступные приемы (например, воспользоваться разложениями функций по формуле Маклорена).

Для рассматриваемой функции проще всего выделить целую часть дроби

$$y = \frac{(x+1)^3}{x^2} = \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2} = x + 3 + \frac{3x+1}{x^2} = x + 3 + o(1)$$

Из этого представления можно не только сделать вывод о том, что прямая $y = x + 3$ является асимптотой графика как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$, но и получить дополнительную информацию. Например, поскольку при больших положительных x

$$\frac{3x+1}{x^2} > 0$$

то при $x \to +\infty$ график будет приближаться к асимптоте сверху. А при $x \to -\infty$

$$\frac{3x+1}{x^2} < 0$$

и график будет приближаться к асимптоте снизу.

Добавим асимптоту $y = x + 3$ к рисунку 1 (рис. 2).

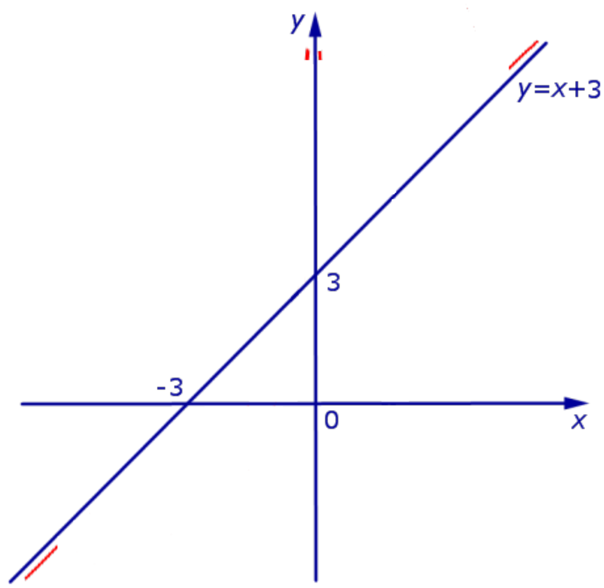


Рис. 2

5. Интервалы возрастания и убывания, экстремумы

Достаточные условия возрастания и убывания функции на интервале

Для того, чтобы найти интервалы, на которых функция возрастает или убывает, часто используется метод, основанный на анализе знаков производной рассматриваемой функции. Суть этого метода состоит в следующем.

Утверждение 1 *Пусть функция* $f(x)$ *дифференцируема на интервале* (a, b).

1. *Если для всех* $x \in (a, b)$ *производная удовлетворяет неравенству*

$$f'(x) > 0$$

то функция $f(x)$ *строго возрастает на интервале* (a, b);

2. *Если для всех* $x \in (a, b)$ *производная удовлетворяет неравенству*

$$f'(x) < 0$$

то функция $f(x)$ *строго убывает на интервале* (a, b).

Экстремумы функции

Определение 5 *Критической точкой функции называют такую точку, в которой производная функции равна нулю или не существует.*

Определение 6 *Точку* x_0 *называют точкой строгого локального максимума функции* $f(x)$, *если существует такая окрестность* $U(x_0)$, *что для всех* $x \in \dot{U}(x_0)$, *выполнено неравенство*

$$f(x) < f(x_0)$$

Определение 7 *Точку* x_0 *называют точкой строгого локального минимума функции* $f(x)$, *если существует такая окрестность* $U(x_0)$, *что для всех* $x \in \dot{U}(x_0)$, *выполнено неравенство*

$$f(x) > f(x_0)$$

Определение 8 *Точки максимума и минимума функции называют точками экстремума функции, а значения функции в точках экстремума называют экстремумами функции.*

Необходимое условие экстремума

Утверждение 2 *Если точка* x_0 *является точкой экстремума функции* $f(x)$, *то она является критической точкой этой функции*

По этой причине критические точки функции часто называют «точками, подозрительными на экстремум».

Достаточные условия экстремума

Утверждение 3 *Рассмотрим функцию* $f(x)$, *непрерывную в некоторой окрестности* $U(x_0)$ *и дифференцируемую в проколотой окрестности* $\dot{U}(x_0)$. *Тогда*

а) если выполнено условие:

$$f'(x) > 0 \quad \text{при всех} \quad x < x_0 \qquad \text{и} \qquad f'(x) < 0 \quad \text{при всех} \quad x > x_0\,,$$

то точка x_0 *является точкой строгого максимума функции* $f(x)$;

б) если выполнено условие:

$$f'(x) < 0 \quad \text{при всех} \quad x < x_0 \qquad \text{и} \qquad f'(x) > 0 \quad \text{при всех} \quad x > x_0\,,$$

то точка x_0 *является точкой строгого минимума функции* $f(x)$.

Замечание 3. Условия а) и б) утверждения 3 часто формулируют так: «Если при переходе через точку x_0 производная функции меняет знак с «+» на «$-$», то точка x_0 является точкой максимума функции. Если при переходе через точку x_0 производная функции меняет знак с «$-$» на «+», то точка x_0 является точкой минимума функции».

Проведем исследование функции

$$y = \frac{(x+1)^3}{x^2} \tag{5}$$

на экстремумы, интервалы возрастания и убывания, используя уже вычисленную ранее производную

$$y' = \frac{(x+1)^2(x-2)}{x^3}$$

(см. формулу (4)).

Определим критические точки функции. Решая уравнение

$$\frac{(x+1)^2(x-2)}{x^3}=0,$$
находим, что точки $x=-1$ и $x=2$ являются критическими.

Изобразим на рисунке 3 диаграмму знаков производной $y'(x)$. Для этого отметим на числовой оси критические точки, а также точку $x=0$, в которой функция не определена, но при переходе через эту точку производная меняет знак.

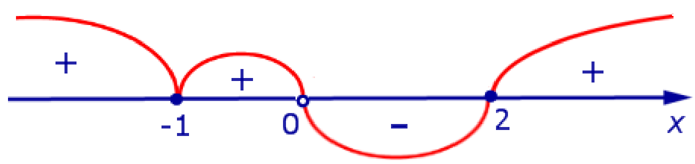


Рис. 3

На интервалах $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$ и $(2,+\infty)$ производная $y'(x)$ положительна, значит, функция (4) возрастает на этих интервалах. На интервале $(0,2)$ производная $y'(x)$ отрицательна, значит, функция (4) убывает на этом интервале. Схематически поведение функции (4)) изображено на рисунке 4.

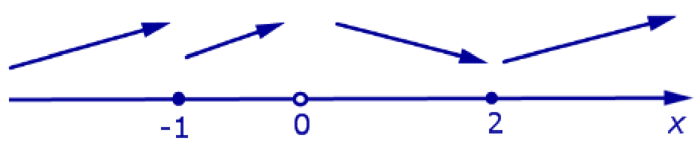


Рис. 4

При переходе через точку $x=-1$ производная функции $y'(x)$ знак не меняет, значит, в этой точке экстремума нет. При переходе через точку $x=2$ производная функции $y'(x)$ меняет знак с «$-$» на «$+$» . Следовательно, точка $x=2$ является точкой строгого минимума функции (4).

Найдем значение функции (4) в точке минимума $x=2$:

$$y(2)=\frac{27}{4}$$

6. Направление выпуклости, точки перегиба

Направление выпуклости функции

Определение 9 *Функцию* $f(x)$ *называют выпуклой вверх на интервале* (a,b) *, если для любых двух точек* $x_1 \in (a,b)$ *и* $x_2 \in (a,b)$ *таких, что* $x_1 < x_2$, *график функции* $y = f(x)$ *расположен выше отрезка, соединяющего точки* $A_1 = (x_1; f(x_1))$ *и* $A_2 = (x_2; f(x_2))$.

Например, функция, график которой изображен на рисунке 5, выпукла вверх на интервале (a,b) .

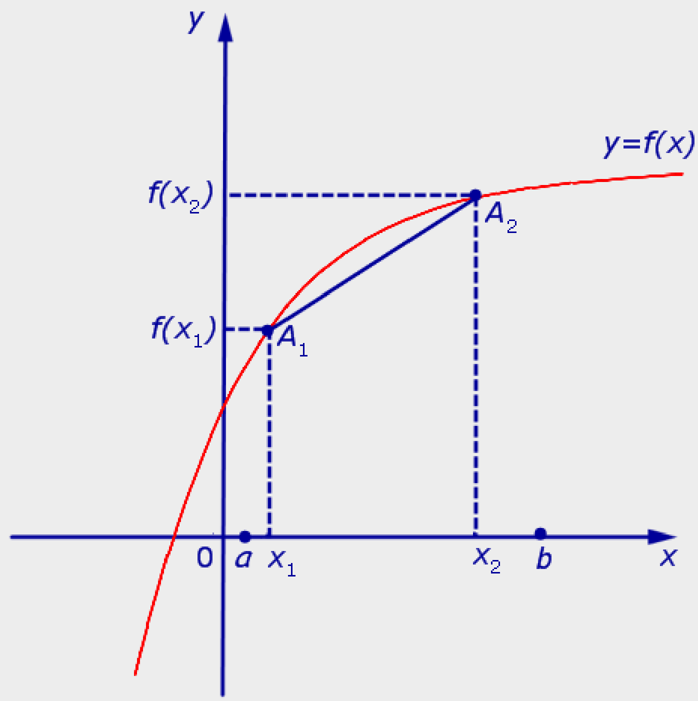


Рис. 5

Определение 10 *Функцию* $f(x)$ *называют выпуклой вниз на интервале* (a,b) *, если для любых двух точек* $x_1 \in (a,b)$ *и* $x_2 \in (a,b)$ *таких, что* $x_1 < x_2$, *график функции* $y = f(x)$ *расположен ниже отрезка, соединяющего точки* $A_1 = (x_1; f(x_1))$ *и* $A_2 = (x_2; f(x_2))$.

Например, функция, график которой изображен на рисунке 6, выпукла вниз на интервале (a,b) .

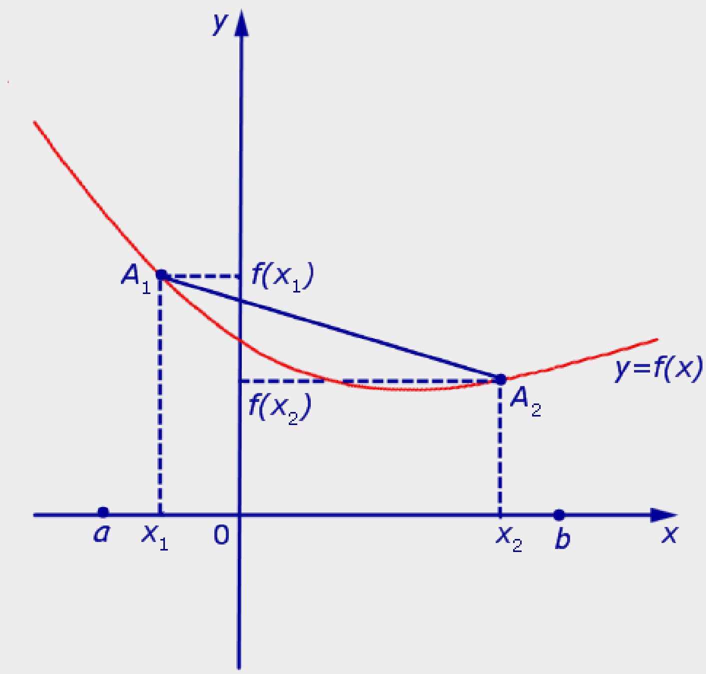


Рис. 6

Достаточные условия выпуклости вверх и выпуклости вниз функции

При исследовании направления выпуклости функции (выпуклость вверх или выпуклость вниз) важную роль играет вторая производная этой функции.

Утверждение 4 *Пусть функция* $f(x)$, *имеет на интервале* (a, b) *вторую производную.*

а) Если для всех $x \in (a, b)$ *выполнено неравенство*

$$f''(x) > 0\,,$$

то $f(x)$ *выпукла вниз на интервале* (a, b) ;

б) Если для всех $x \in (a, b)$ *выполнено неравенство*

$$f''(x) < 0\,,$$

то $f(x)$ *выпукла вверх на интервале* (a, b) .

Точки перегиба

Определение 11 *Пусть функция* $f(x)$ *определена на некотором интервале* (a, b), *содержащем точку* x_0. *Говорят, что при переходе через точку* x_0 *функция* $f(x)$ *меняет направление выпуклости, если на одном из интервалов* (a, x_0) *и* (x_0, b) *функция выпукла вверх, а на другом – выпукла вниз.*

Определение 12 *Пусть функция* $f(x)$ *определена на некотором интервале* (a, b), *содержащем точку* x_0, *а у графика функции в точке* $\big(x_0; f(x_0)\big)$ *существует касательная. Если функция* $f(x)$ *при переходе через точку* x_0 *меняет направление выпуклости, то точку* x_0 *называют точкой перегиба функции* $f(x)$.

Замечание 4. Если x_0 – точка перегиба функции $f(x)$, то график функции $f(x)$ при переходе через точку x_0 переходит с одной стороны от касательной в точке $\big(x_0; f(x_0)\big)$ на другую сторону от касательной, то есть «перегибается» через касательную.
В качестве примера точки перегиба рассмотрим точку $x = 0$ на графике функции $y = x^3$, (рис. 7).

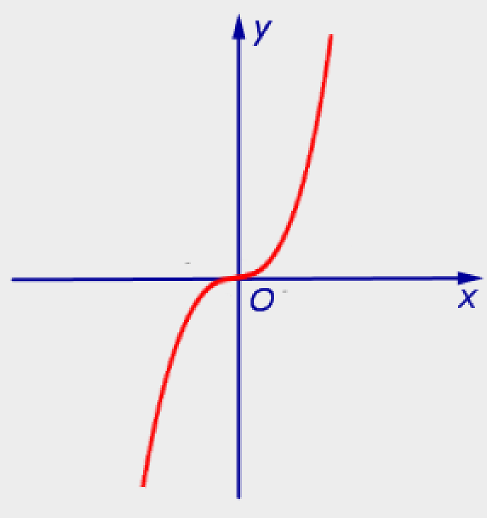


Рис. 7

При переходе через точку $x = 0$ график функции переходит из нижней полуплоскости в верхнюю полуплоскость, то есть «перегибается» через касательную $y = 0$.

Необходимые условия для существования точки перегиба

Утверждение 5 *Если точка* x_0 *является точкой перегиба графика функции* $f(x)$ *, то в точке* x_0 *либо вторая производная* $f''(x) = 0$, *либо* $f''(x)$ *не существует.*

Замечание 5. Условия существования точки перегиба, сформулированные в утверждении 3, являются необходимыми, но не являются достаточными.

Найдем интервалы, на которых функция

$$y = \frac{(x+1)^3}{x^2} \tag{6}$$

сохраняет направление выпуклости, и найдем точки перегиба (если они есть). Для этого вычислим вторую производную функции (6), воспользовавшись найденной ранее первой производной y' (формула (4))

$$y'' = \left(\frac{(x+1)^2(x-2)}{x^3}\right)' =$$

$$= \frac{\left[2(x+1)(x-2) + (x+1)^2\right]x^3 - 3x^2(x+1)^2(x-2)}{x^6} =$$

$$= \frac{(x+1)\left\{\left[2(x-2) + (x+1)\right]x - 3(x+1)(x-2)\right\}}{x^4} =$$

$$= \frac{(x+1)\left\{3x^2 - 3x - 3x^2 - 3x + 6x + 6\right\}}{x^4} = \frac{6(x+1)}{x^4}$$

Изобразим диаграмму знаков второй производной y'' (рис. 8)

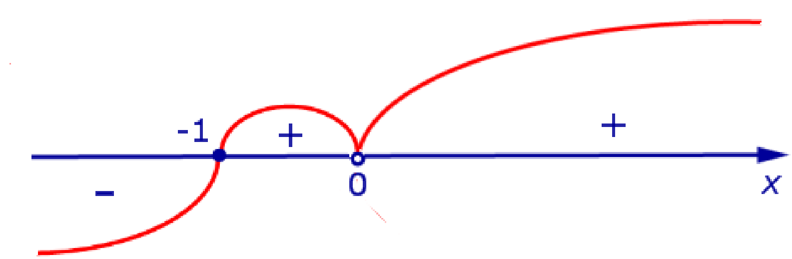


Рис. 8

При переходе через точку $x = -1$ вторая производная функции y'' меняет знак с «$-$» на «$+$». Следовательно, $x = -1$ – точка перегиба графика функции $f(x)$.

Найдем значения функции $f(x)$ и производной $f'(x)$ в точке перегиба

$$f(-1) = 0, \qquad f'(-1) = 0.$$

Значит, $x = -1$ – точка перегиба с горизонтальной касательной.

При $x < -1$ функция $f(x)$ выпукла вверх, при $x > -1$ функция $f(x)$ выпукла вниз.

Дополним схему поведения функции, представленную на рисунке 4, данными о направлении выпуклости функции (рис. 9).

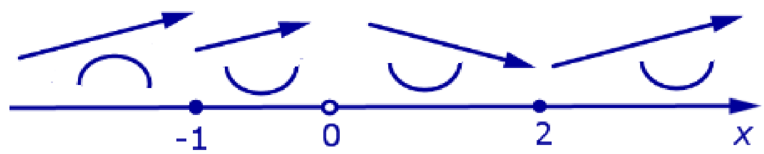


Рис. 9

7. Точки пересечения графика функции с осями координат

При построении графиков функций необходимо, где это возможно, указывать точки пересечения графика функции с осями координат.

Для рассматриваемой функции

$$y = \frac{(x+1)^3}{x^2}$$

- точка $(-1; 0)$ является единственной точкой пересечения графика функции с осью Ox,

- точек пересечения графика функции с осью Oy нет, поскольку $x = 0$ не входит в область определения функции.

Добавим на схему поведения функции, изображенную на рис. 9, информацию о знаках функции (рис. 10).

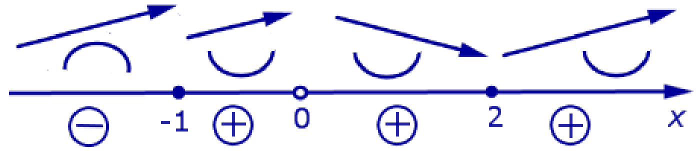


Рис. 10

В результате на рис. 10 в схематической форме оказался представленным большой объем данных о свойствах функции

$$y = \frac{(x+1)^3}{x^2}$$

8. График функции

Теперь мы можем приступить к построению графика функции. Для этого будем дополнять рис. 2, рассматривая по очереди интервалы с однотипным поведением функции.

Рассмотрим сначала интервал $(-\infty, -1)$. Как мы выяснили ранее, при $x \to -\infty$ график функции имеет асимптоту $y = x+3$ и располагается снизу от нее. Из схемы на рисунка 10 видно, что на интервале $(-\infty, -1)$ функция принимает отрицательные значения и растет из $-\infty$ до 0, оставаясь выпуклой вверх. Изобразим этот участок на графике (рис. 11)

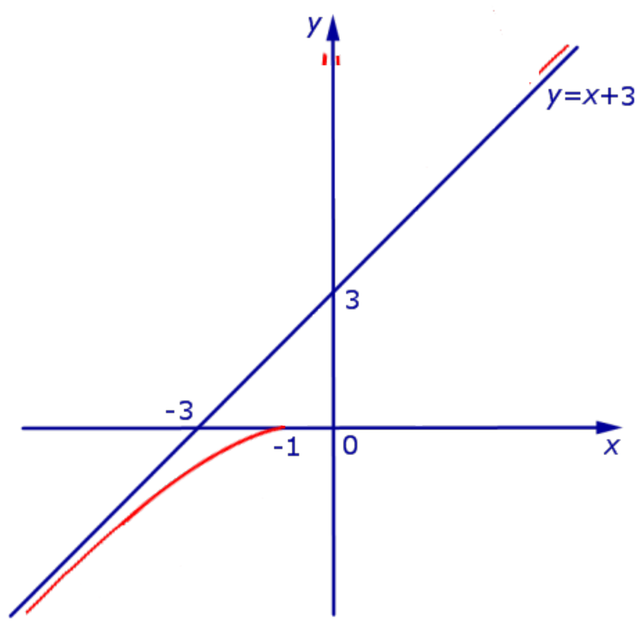
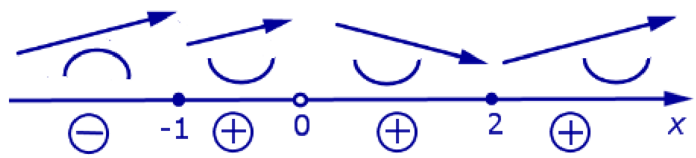


Рис. 11

В точке перегиба $(-1\,;\,0)$ с горизонтальной касательной изменяется направление выпуклости графика, функция продолжает расти.

Рассмотрим интервал $(-1, 0)$. Как мы выяснили ранее, при $x \to -0$ график функции имеет вертикальную асимптоту $x = 0$ и $f(x) \to +\infty$ при $x \to -0$. Из схемы на рисунке 10 (приводим её ещё раз)



видно, что на интервале $(-1, 0)$ функция принимает положительные значения и растет от 0 до $+\infty$, оставаясь выпуклой вниз. Изобразим этот участок на графике (рис. 12)

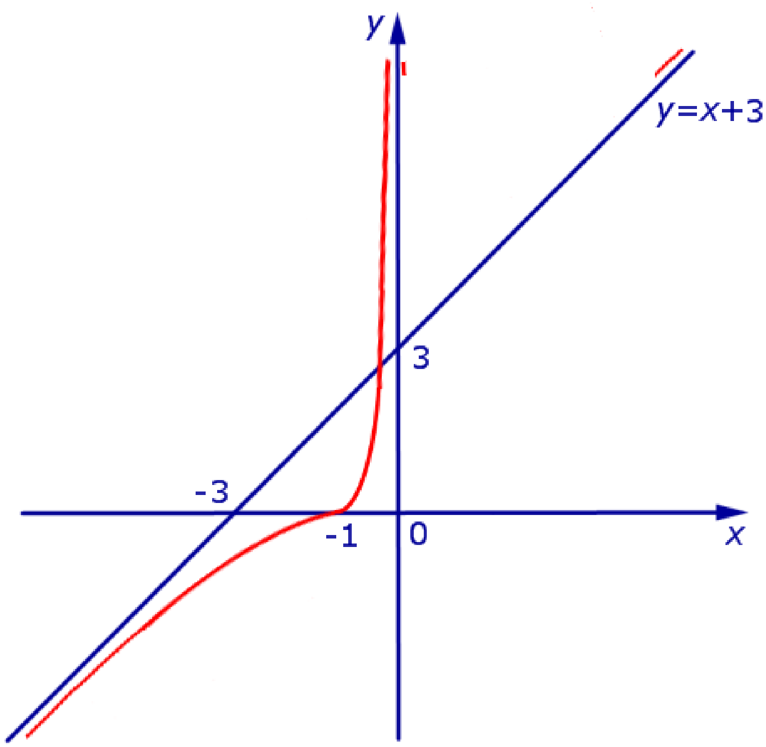
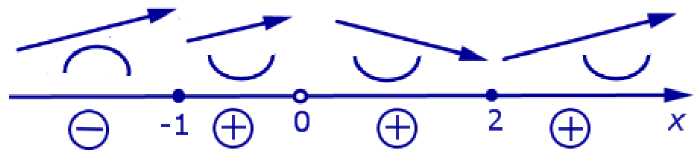


Рис. 12

Теперь перейдем к интервалу $(0, 2)$. При $x \to +0$ график функции имеет вертикальную асимптоту $x = 0$ и $f(x) \to +\infty$ при $x \to +0$. Из схемы на рисунке 10



видим, что на интервале $(0, 2)$ функция принимает положительные значения и убывает от $+\infty$, до $\dfrac{27}{4}$, оставаясь выпуклой вниз. Заметим, что точка $\left(2\,;\,\dfrac{27}{4}\right)$ расположена выше наклонной асимптоты $y = x + 3$, поскольку

$$\frac{27}{4} > 5$$

В точке $x = 2$ функция достигает локального минимума. Справа от этой точки функция будет расти.

Изобразим этот участок на графике (рис. 12)

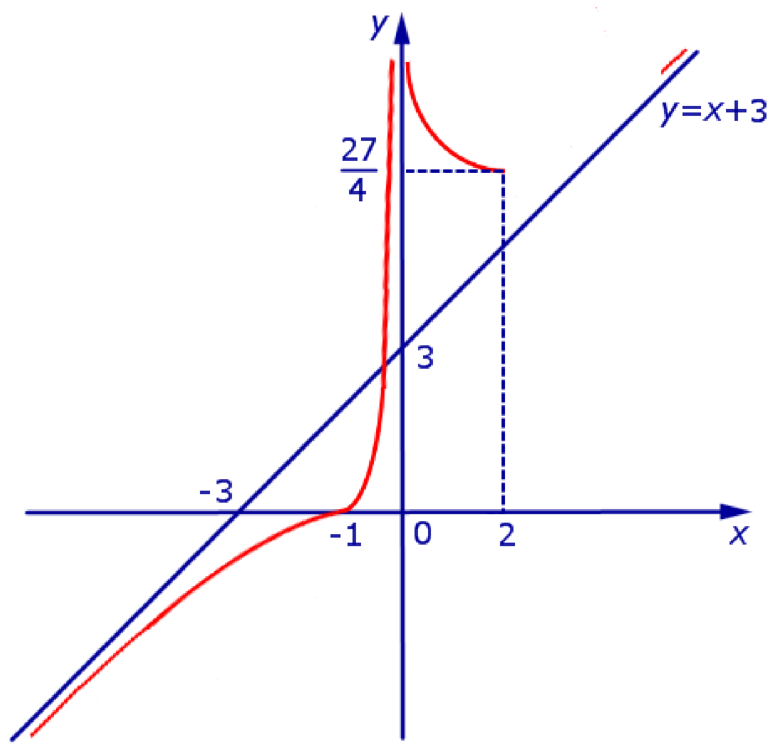
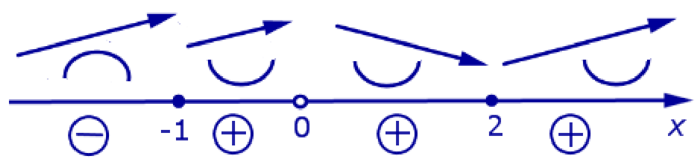


Рис. 12

И, наконец, рассмотрим последний интервал $(2,+\infty)$. В соответствии со схемой на рисунке 10



на интервале $(2,+\infty)$ функция принимает положительные значения, возрастает от $\dfrac{27}{4}$ до $+\infty$, выпукла вниз. При $x \to +\infty$ график функции приближается к наклонной асимптоте $y = x + 3$ сверху. Изображаем этот участок и получаем окончательный график (рис.13).

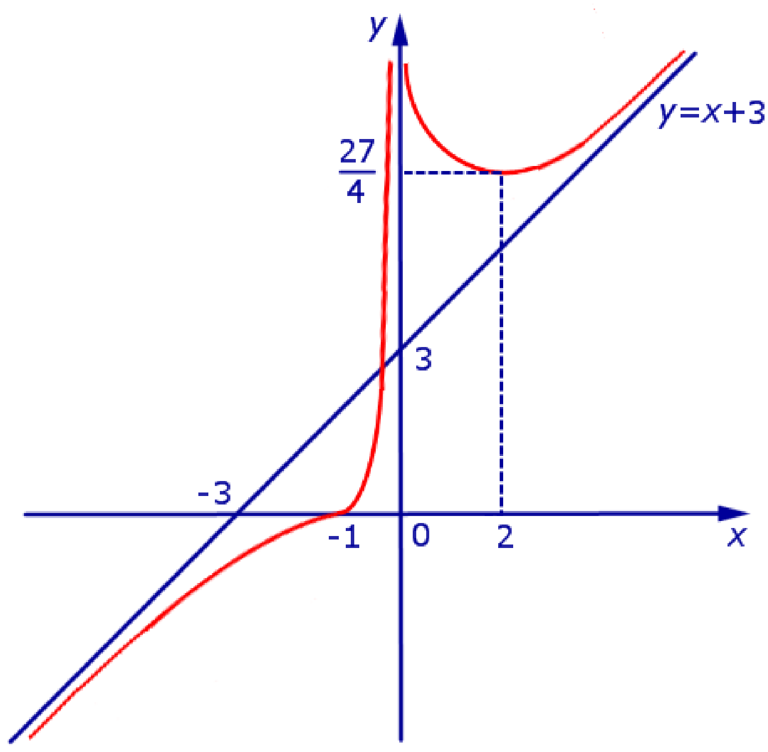


Рис. 13

Решим ещё одну задачу на построение графика функции (экзаменационная контрольная 2015/2016 уч. г.)

Задача 2 *Построить график функции*

$$y = \frac{-2x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} \tag{7}$$

Решение.

1. Область определения

Областью определения функции (7) является вся числовая прямая, за исключением точек $x = \pm 1$, то есть $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

2. Четность

Функция (7) не является ни четной, ни нечетной.

3. Периодичность

Функция (7) не является периодической.

4. Асимптоты

Поскольку при $x \to -1$

$$\lim_{x \to -1+0} \frac{-2x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} = -\infty \qquad \text{и} \qquad \lim_{x \to -1-0} \frac{-2x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} = +\infty$$

то прямая $x = -1$ является вертикальной асимптотой графика функции (7) как справа, так и слева.

Аналогично, поскольку при $x \to 1$

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{-2x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} = -\infty \qquad \text{и} \qquad \lim_{x \to 1-0} \frac{-2x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} = +\infty$$

то прямая $x = 1$ также является вертикальной асимптотой графика функции (7) как справа, так и слева.

Изобразим эти асимптоты на рисунке 14

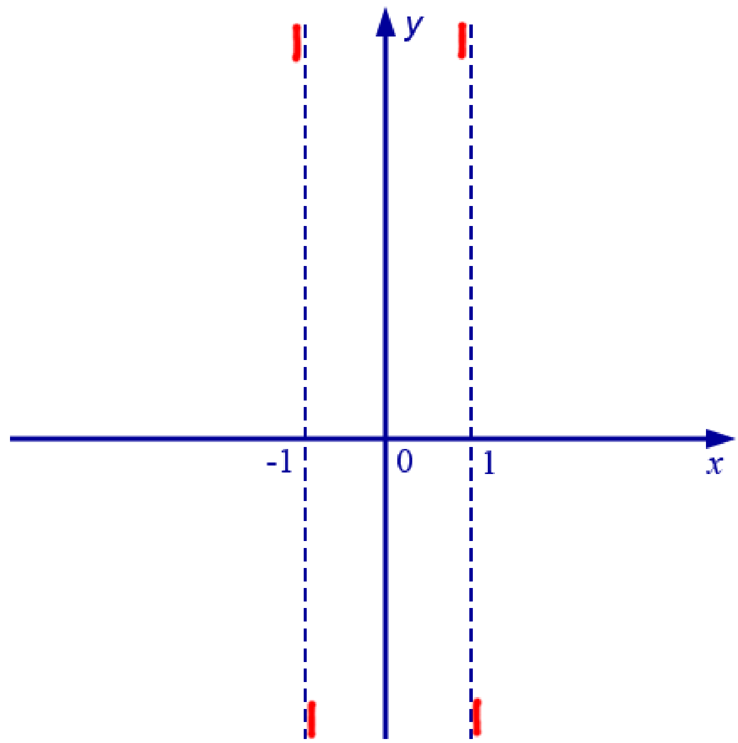


Рис. 14

Для того, чтобы найти наклонные асимптоты графика, выделим целую часть дроби

$$y = \frac{-2x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} = -2x + 1 - \frac{2x}{x^2 - 1} = -2x + 1 + o(1)$$

Из полученного разложения следует, что прямая $y = -2x + 1$ является наклонной асимптотой графика как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$, причем при $x \to +\infty$, график будет приближаться к асимптоте снизу, а при $x \to -\infty$ график будет приближаться к асимптоте сверху.

Добавляя асимптоту $y = -2x + 1$ на рис. 14, получаем рис. 15.

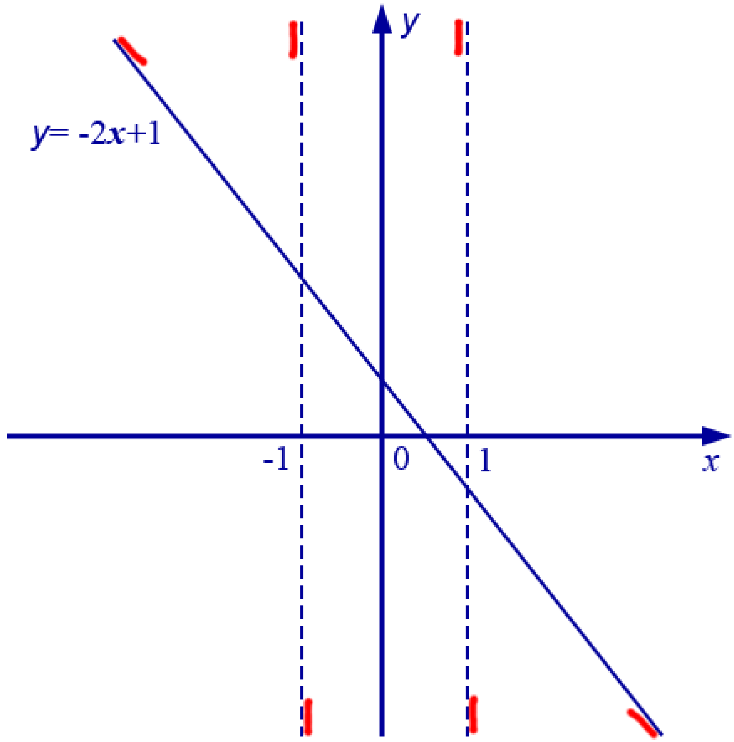


Рис. 15

5. Интервалы возрастания и убывания, экстремумы

Вычислим производную

$$y' = \left(\frac{-2x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1}\right)' = \frac{(-6x^2 + 2x)(x^2 - 1) - 2x(-2x^3 + x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^2} =$$

$$= \frac{-6x^4 + 2x^3 + 6x^2 - 2x + 4x^4 - 2x^3 + 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x^4 + 6x^2}{(x^2 - 1)^2} =$$

$$= \frac{-2x^2(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{(x - 1)^2(x + 1)^2}$$

Критическими точками функции являются точки: $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ и $x = -\sqrt{3}$.

Изобразим на рисунке 16 диаграмму знаков производной $y'(x)$. Для этого отметим на числовой оси критические точки, а также точки $x = \pm 1$, в которых функция не определена.

Из формулы для производной функции $y'(x)$ следует, что при переходе через точки $x = \pm 1$ производная знак не меняет.

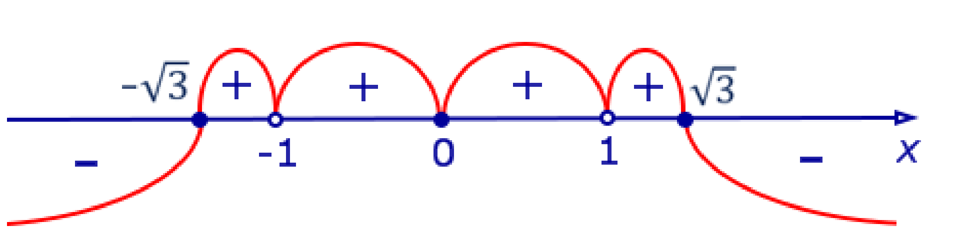


Рис. 16

На интервалах $(-\infty, -\sqrt{3})$ и $(\sqrt{3}, +\infty)$ производная $y'(x)$ отрицательна, значит, функция убывает на этих интервалах.

На интервалах $(-\sqrt{3}, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, и $(1, \sqrt{3})$ производная $y'(x)$ положительна, значит, функция возрастает на этих интервалах.

Промежутки возрастания и убывания функции схематически изображены на рис. 17.

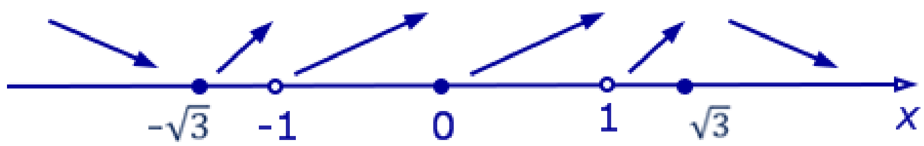


Рис. 17

При переходе через точку $x = 0$ производная функции $y'(x)$ знак не меняет, значит, в этой точке у функции экстремума нет.

При переходе через точку $x = -\sqrt{3}$ производная функции $y'(x)$ меняет знак с «$-$» на «$+$» . Следовательно, точка $x = -\sqrt{3}$ является точкой строгого локального минимума.

Найдем значение функции в точке минимума $x = -\sqrt{3}$:

$$y(-\sqrt{3}) = \frac{6\sqrt{3} + 2}{2} = 3\sqrt{3} + 1$$

При переходе через точку $x = \sqrt{3}$ производная функции $y'(x)$ меняет знак с «$+$» на «$-$» . Следовательно, точка $x = \sqrt{3}$ является точкой строгого локального максимума.

Найдем значение функции в точке максимума $x = \sqrt{3}$:

$$y(\sqrt{3}) = \frac{-6\sqrt{3}+2}{2} = -3\sqrt{3}+1$$

6. <u>Направление выпуклости, точки перегиба</u>
Найдем интервалы, на которых функция

$$y = \frac{-2x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1}$$

сохраняет направление выпуклости, и найдем точки перегиба (если они есть). Для этого вычислим вторую производную функции, воспользовавшись найденной ранее первой производной y'

$$y'' = \left(\frac{-2x^4 + 6x^2}{(x^2-1)^2}\right)' =$$

$$= \frac{\big(-8x^3 + 12x\big)(x^2-1)^2 - 4x(x^2-1)(-2x^4+6x^2)}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{\big(-8x^3 + 12x\big)(x^2-1) - 4x(-2x^4+6x^2)}{(x^2-1)^3} =$$

$$= \frac{-8x^5 + 12x^3 + 8x^3 - 12x + 8x^5 - 24x^3}{(x^2-1)^3} = \frac{-4x^3 - 12x}{(x^2-1)^3} =$$

$$= \frac{-4x(x^2+3)}{(x+1)^3(x-1)^3}$$

Изобразим диаграмму знаков второй производной y'' (рис. 18)

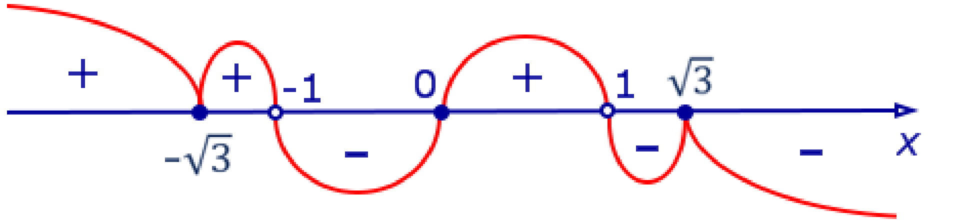


Рис. 18

При переходе через точку $x = 0$ вторая производная функции y'' меняет знак с «$-$» на «$+$». Следовательно, $x = 0$ – точка перегиба графика функции $f(x)$.

Найдем значения функции $f(x)$ и производной $f'(x)$ в точке перегиба

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = 0.$$

Значит, $x = 0$ – точка перегиба с горизонтальной касательной.

При $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$ функция $f(x)$ выпукла вниз, при $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$ функция $f(x)$ выпукла вверх.

Дополним схему поведения функции, представленную на рис. 17, данными о направлении выпуклости функции (рис. 19).

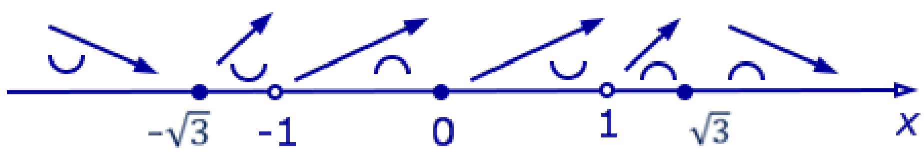


Рис. 19

7. Точки пересечения графика функции с осями координат

При построении графиков функций необходимо, где это возможно, указывать точки пересечения графика функции с осями координат.

Для рассматриваемой функции

$$y = \frac{-2x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1}$$

- единственная точка пересечения графика функции с осью Ox находится на интервале $(-1, 0)$, поскольку функция на этом интервале возрастает

$$\lim_{x \to -1+0} \frac{-2x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} = -\infty \qquad \text{и} \qquad f(0) = 1$$

Точно указать эту точку сложно, т.к. для этого нужно решать кубическое уравнение.

На интервале $(-\infty, -1)$ функция положительна, поскольку значение в точке локального минимума

$$f(-\sqrt{3}) = 3\sqrt{3} + 1 > 0$$

На интервале $(1, +\infty)$ функция отрицательна, поскольку значение в точке локального максимума

$$f(\sqrt{3}) = -3\sqrt{3} + 1 < 0$$

- график функции пересекает ось Oy в точке $(0; 1)$.

Дополним схему поведения функции, представленную на рис. 19, данными о знаках функции (рис. 20).

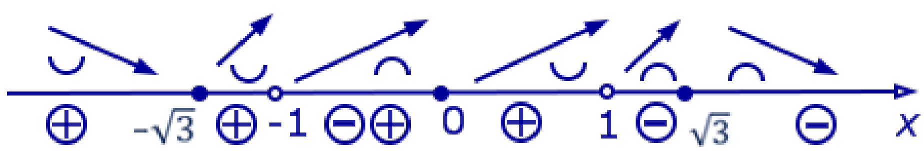


Рис. 20

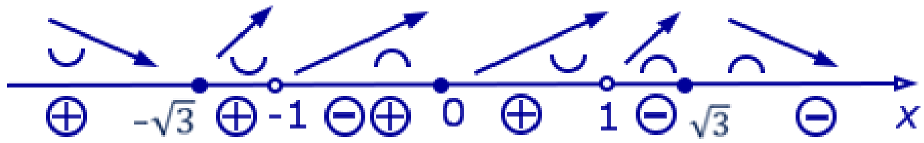
В результате на рис. 20 в схематической форме оказался представленным большой объем данных о свойствах функции

$$y = \frac{-2x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1}$$

8. График функции

Теперь перейдем к построению графика функции. Для этого будем дополнять рис. 15, рассматривая по очереди интервалы с однотипным поведением функции.

Рассмотрим сначала интервал $(-\infty, -\sqrt{3})$. Как мы выяснили ранее, при $x \to -\infty$ график функции имеет асимптоту $y = -2x + 1$ и располагается сверху от нее. Из схемы на рисунке 20



видно, что на интервале $(-\infty, -\sqrt{3})$ функция принимает положительные значения и убывает от $+\infty$ до $3\sqrt{3}+1$, оставаясь выпуклой вниз. Отметим, что точка $(-\sqrt{3}\,; 3\sqrt{3}+1)$ расположена выше асимптоты, поскольку

$$3\sqrt{3}+1 > 2\sqrt{3}+1$$

Изобразим этот участок на графике (рис. 21)

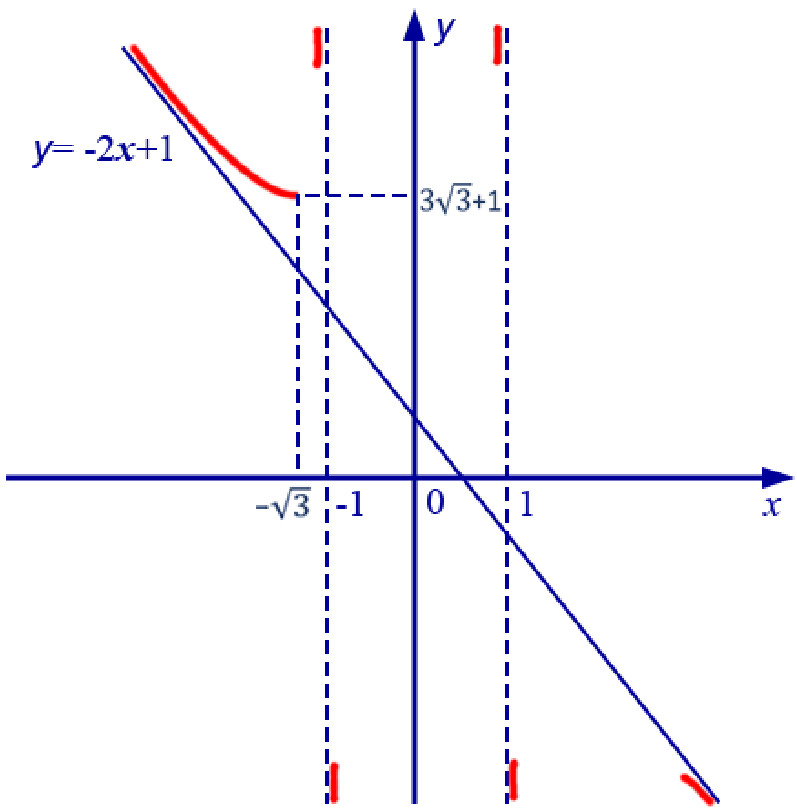
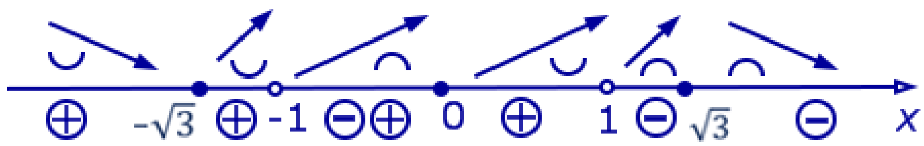


Рис. 21

В точке $(-\sqrt{3}, 3\sqrt{3}+1)$ функция достигает локального минимума. Справа от этой точки функция начинает расти.

Рассмотрим интервал $(-\sqrt{3}, -1)$. Для этого снова обратимся к схеме на рисунке 20



Как мы выяснили ранее, при $x \to -1-0$ график функции имеет вертикальную асимптоту $x = -1$ и $f(x) \to +\infty$ при $x \to -1-0$. Из схемы видно, что на интервале $(-\sqrt{3}, -1)$ функция принимает положительные значения и растет от $3\sqrt{3}+1$ до $+\infty$, оставаясь выпуклой вниз. Изобразим этот участок на графике (рис. 22)

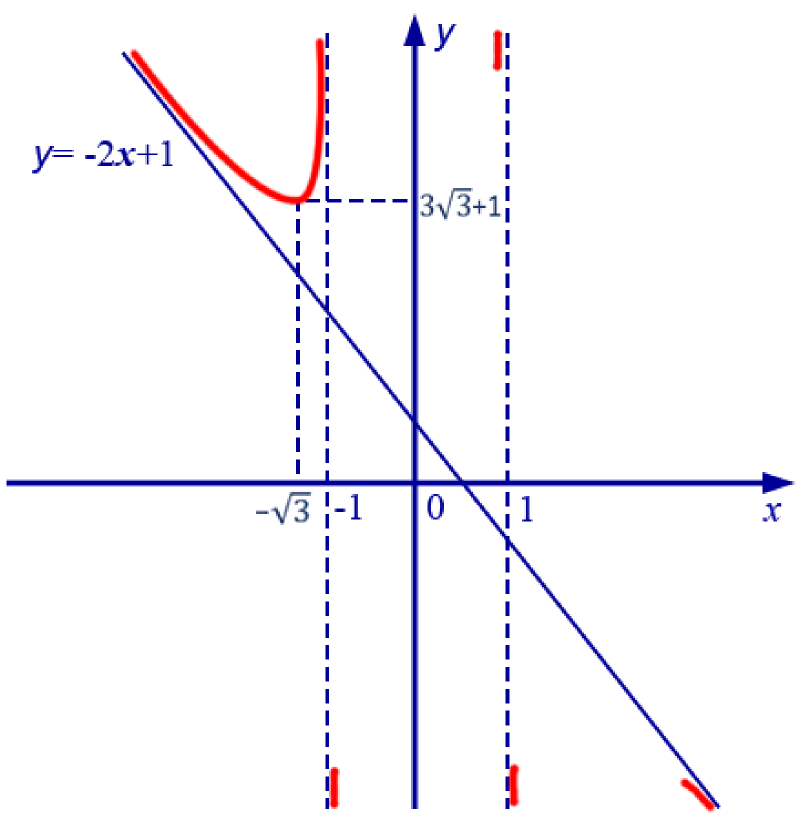
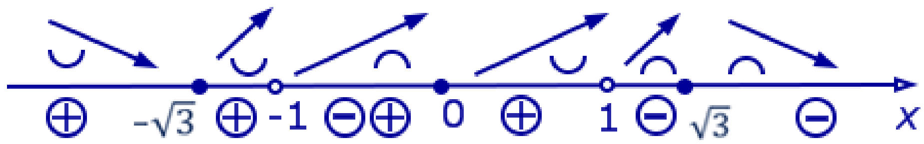


Рис. 22

Теперь перейдем к интервалу $(-1, 0)$. При $x \to -1+0$ график функции имеет вертикальную асимптоту $x = -1$ и $f(x) \to -\infty$ при $x \to -1+0$. Из схемы на рисунке 20



видим, что на интервале $(-1, 0)$ функция растет от $-\infty$ до 1, пересекая ось Ox, и выпукла вверх.

В точке $(0\,;\,1)$ график функции имеет точку перегиба с горизонтальной касательной. Справа от этой точки направление выпуклости функции изменится. Изобразим участок графика при $x \in (-1, 0)$, дополнив рисунок 22 (рис. 23):

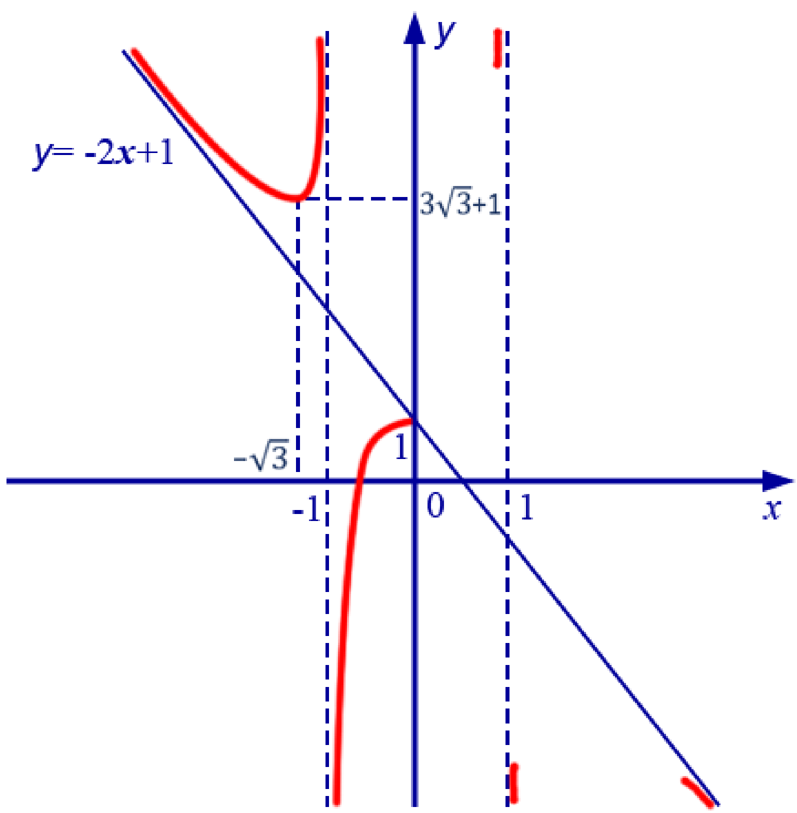
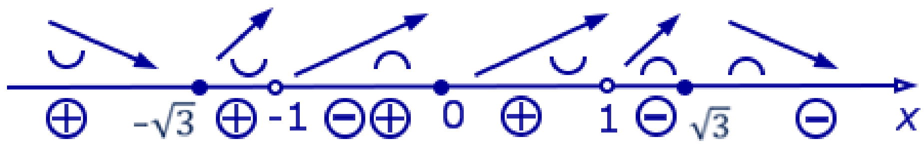


Рис. 23

Далее рассмотрим интервал $(0,1)$. Здесь имеется вертикальная асимптота при $x \to 1-0$ и $f(x) \to +\infty$ при $x \to 1-0$. Снова изучив схему на рисунке 20



видим, что на интервале $(0,1)$ наша функция продолжает расти от 1 до $+\infty$, однако направление выпуклости при переходе через точку 0 у нее изменяется. На этом интервале функция выпукла вниз. Добавим этот участок графика к рисунку 23 (рис.24)

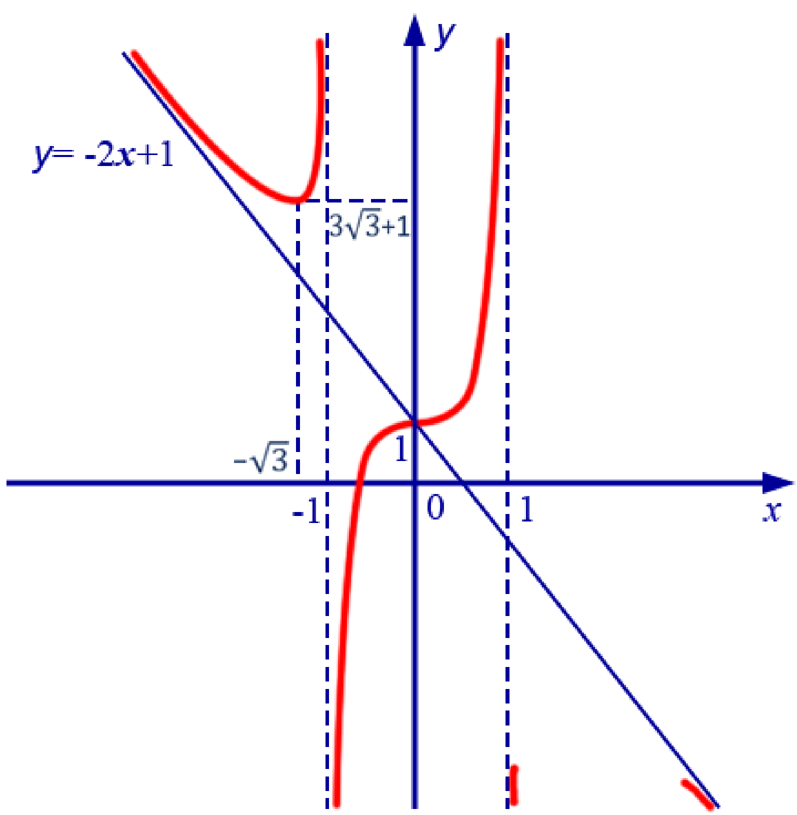
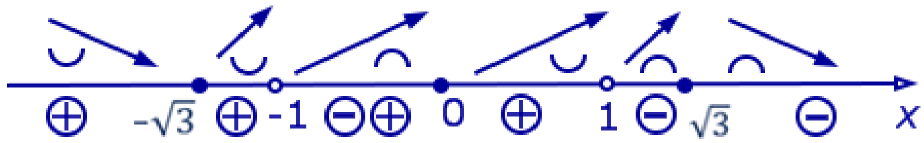


Рис. 24

Перейдем к следующему интервалу $(1, \sqrt{3})$. При $x \to 1+0$ график функции имеет вертикальную асимптоту $x = 1$ и $f(x) \to -\infty$ при $x \to 1+0$. Из схемы на рисунке 20



видим, что на интервале $(1, \sqrt{3})$ функция принимает отрицательные значения и растет от $-\infty$, до $-3\sqrt{3}+1$, при этом является выпуклой вверх.

Отметим, что точка $(\sqrt{3}\,; -3\sqrt{3}+1)$ расположена ниже асимптоты, поскольку

$$-3\sqrt{3}+1 < -2\sqrt{3}+1$$

Изобразим этот участок на графике (рис. 25)

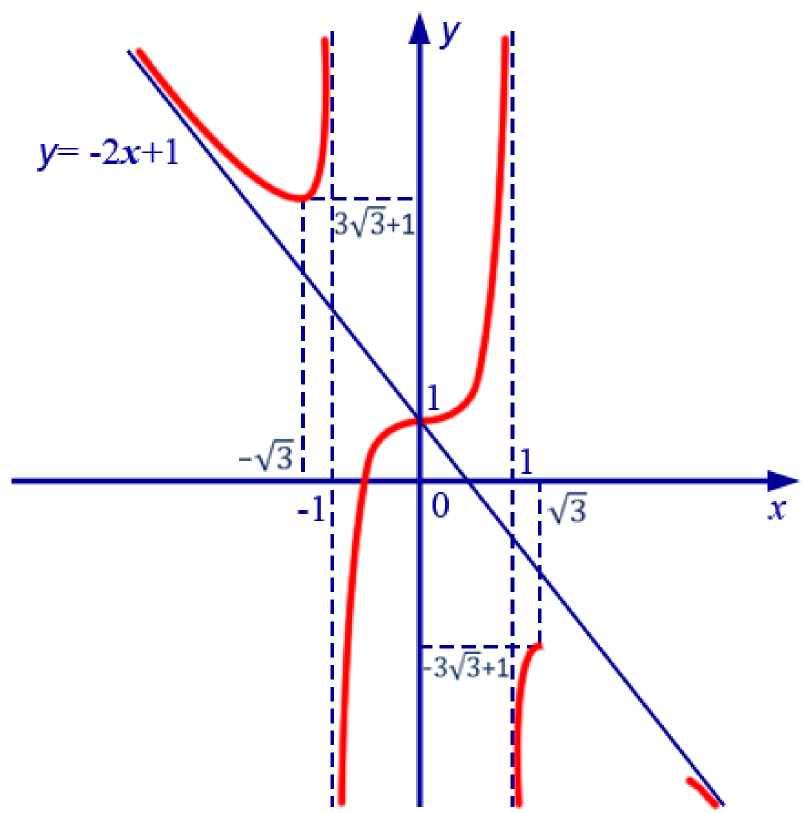
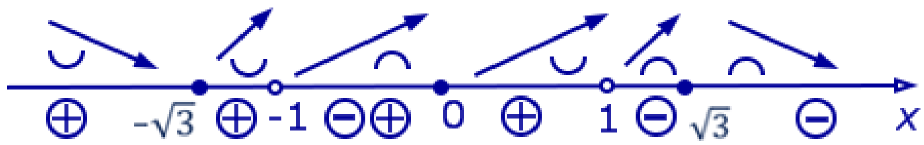


Рис. 25

В точке $(\sqrt{3}\,,\,-3\sqrt{3}+1)$ функция достигает локального максимума и справа от этой точки функция будет убывать.

Наконец, рассмотрим последний интервал $(\sqrt{3},+\infty)$. В соответствии со схемой на рисунке 20



заключаем, что на интервале $(\sqrt{3},+\infty)$ функция принимает отрицательные значения, убывает от $-3\sqrt{3}+1$ до $-\infty$, , выпукла вверх.

При $x \to +\infty$ график функции приближается снизу к наклонной асимптоте $y = -2x+1$. Изображаем этот участок и получаем окончательный график (рис. 26).

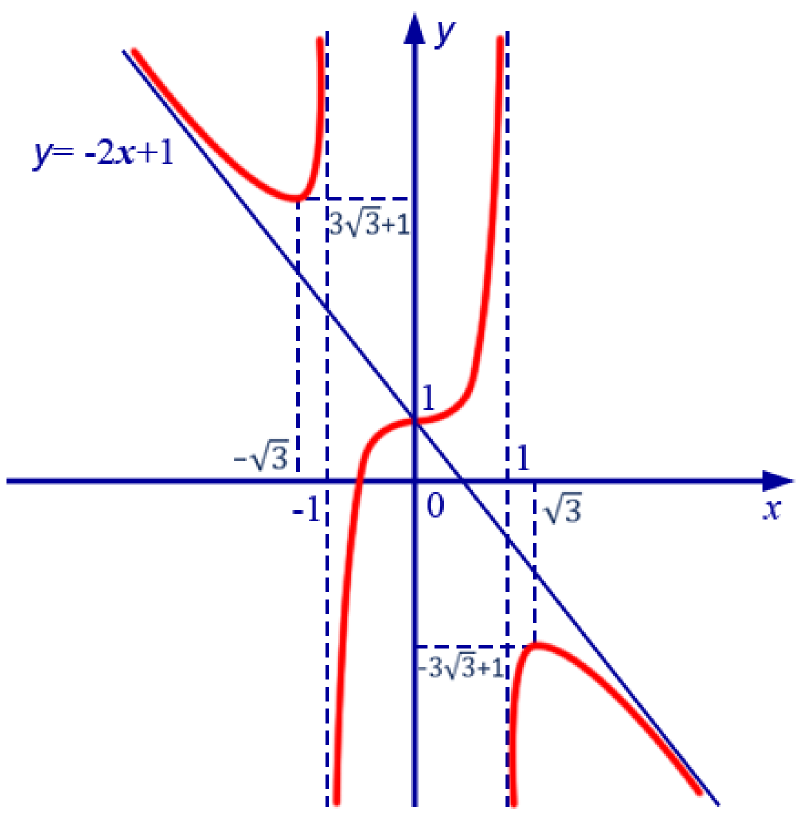


Рис. 26

На следующем занятии мы продолжим построение графиков функций и рассмотрим функции, графики которых построить несколько сложнее.

Спасибо за внимание.
Не болейте!