Доктор физико-математических наук, профессор

К. Л. САМАРОВ

КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

Учебно-методическое пособие для школьников

Квадратным трехчленом относительно x называют многочлен 2-й степени

$$ax^2+bx+c,$$

где a,b,c - числа, называемые коэффициентами квадратного трехчлена, $a\neq 0$.

Квадратным уравнением называют уравнение относительно x вида:

$$ax^2+bx+c=0.$$

Решения квадратного уравнения, т.е. значения x, при которых квадратный трехчлен обращается в нуль, называют ***корнями*** квадратного трехчлена (уравнения).

Пример 1. Найти все значения параметра p, при которых один из корней уравнения

$$-3x^2+2px+8p=0$$

равен 2.

Решение. Подставив в уравнение число $x=2$, получим

$$-3\cdot 2^2+2p\cdot 2+8p=12p-12=0,$$

$$12p=12, \quad p=1.$$

Ответ: $p=1$.

Выделением полного квадрата называют представление квадратного трехчлена в виде:

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Чтобы получить эту формулу, проведем следующие вычисления, основой которых является формула для **квадрата суммы двух слагаемых**:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-a\cdot\frac{b^2}{4a^2}+a\cdot\frac{c}{a}=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a}+\frac{4ac}{4a}=$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Выделение полного квадрата позволяет также найти **корни** квадратного трехчлена.

Действительно, если квадратный трехчлен имеет корни, то

$$ax^2+bx+c=0\Leftrightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0\Leftrightarrow a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Поскольку левая часть последнего выражения неотрицательна, то для того, чтобы у уравнения существовали корни, необходимо и достаточно, чтобы и правая часть была неотрицательной, а это возможно лишь в том случае, когда число

$$D=b^2-4ac,$$

называемое **дискриминантом квадратного уравнения**, больше или равно нулю. При этом

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.$$

Итак, **формула корней квадратного уравнения** имеет вид:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Если дискриминант положителен, то квадратное уравнение имеет два различных корня. **Если дискриминант равен нулю**, то квадратное уравнение имеет два совпавших корня. **Если дискриминант отрицателен**, то квадратное уравнение корней не имеет.

Из формулы для корней квадратного уравнения вытекает **теорема Виета**: Корни квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0$$

являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Действительно, если x_1 и x_2 **–** корни квадратного уравнения, то

$$x_1+x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a},$$

Таким образом, первое уравнение системы выполнено. Чтобы проверить выполнимость второго уравнения системы, нужно воспользоваться одной из формул сокращенного умножения, а именно, **формулой разности квадратов двух чисел**:

$$x_1\cdot x_2=\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\cdot\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=\frac{(-b)^2-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2}=$$

$$=\frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2}=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

Теорема Виета доказана.

Справедлива и **обратная теорема Виета:**

Если пара чисел (u,v) является решением системы уравнений

$$\begin{cases} u+v=-\dfrac{b}{a}, \\ u\cdot v=\dfrac{c}{a}, \end{cases}$$

то эти числа u и v **являются корнями квадратного уравнения**

$$ax^2+bx+c=0.$$

Очень важной является **формула разложения квадратного трехчлена на множители.** Чтобы получить эту формулу, проведем следующие вычисления, основой которых является теорема Виета:

$$a(x-x_1)(x-x_2)=a(x^2-xx_1-xx_2+x_1x_2)=a(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2)=$$
$$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=ax^2+bx+c.$$

Таким образом, **если дискриминант квадратного трехчлена неотрицателен, то квадратный трехчлен раскладывается на множители:**

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

При этом в случае, **когда дискриминант равен нулю,** выполняется соотношение $x_1=x_2$ и **разложение на множители имеет вид:**

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2.$$

Пример 2. Сократить дробь

$$\frac{x^2+6x-7}{x+7}$$

Решение. Разложим сначала квадратный трехчлен, стоящий в числителе дроби, на множители:

$$x^2+6x-7=0,\ x_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{36+28}}{2}=\frac{-6\pm 8}{2},\ x_1=-7,\ x_2=1,$$
$$x^2+6x-7=(x+7)(x-1).$$

Поэтому

$$\frac{x^2+6x-7}{x+7}=\frac{(x+7)(x-1)}{x+7}=x-1.$$

Ответ: $x-1$.

Перейдем теперь к свойствам графика квадратного трехчлена.

График функции $y=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$ называется **параболой**. На рис.1 изображен график параболы $y=x^2$.

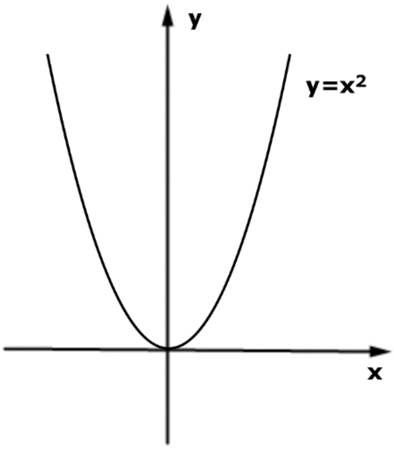

Рис. 1

При $a>0$ ветви параболы $y=ax^2$ направлены вверх. При $a<0$ ветви параболы направлены вниз. Вершина параболы совпадает с началом системы координат.

В соответствии с формулой

$$ax^2+bx+c=0=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a},$$

графиком функции (квадратного трехчлена) $y=ax^2+bx+c$ **является парабола** $y=ax^2$, **сдвинутая так, чтобы ее вершина** (Рис. 2) **попала в точку** $M_v=(x_v;y_v)$, где

$$x_v=-\frac{b}{2a},$$

$$y_v = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = -\frac{b^2}{4a} + c = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{D}{4a}.$$

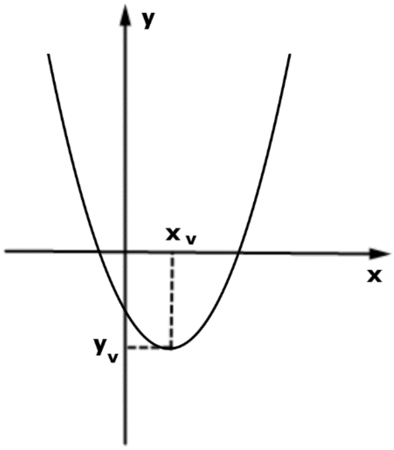

Рис. 2

Последнюю формулу запоминать не нужно. Значение y_v вычисляется при помощи подстановки координаты вершины $x = -\frac{b}{2a}$ в формулу $y = ax^2 + bx + c$.

Парабола $y = ax^2 + bx + c$ пересекает ось ***OY*** в точке с координатами (0, *c*). При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх. При $a < 0$ ветви параболы направлены вниз. В случае $a > 0$ функция $y = ax^2 + bx + c$ в точке x_v достигает наименьшего значения. В случае $a < 0$ функция $y = ax^2 + bx + c$ в точке x_v достигает наибольшего значения.

Если квадратный трехчлен имеет два различных корня (дискриминант положителен), то парабола пересекает ось ***OX*** в точках с координатами $(x_1; 0)$ и $(x_2; 0)$.

Если квадратный трехчлен имеет два совпавших корня (дискриминант равен 0), то парабола **касается** оси ***OX*** в точке с координатой $(x_v; 0)$. В этом случае

$$x_1 = x_2 = x_v = -\frac{b}{2a}.$$

Если квадратный трехчлен корней не имеет (дискриминант отрицателен), то парабола ось ***OX*** вообще не пересекает.

Пример 3. Определить знаки коэффициентов a, b, c, исходя из расположения параболы $ax^2 + bx + c$, изображенной на рис. 2, относительно осей координат (стр. 6).

Решение. Поскольку ветви параболы направлены вверх, то $a > 0$. Поскольку парабола пересекает ось ***OY*** в точке с отрицательной ординатой, то $c < 0$. Поскольку x –я координата вершины параболы $x_v = -\dfrac{b}{2a} > 0,$ то, в силу того, что $a > 0$, заключаем, что $b < 0$.

Ответ: $a > 0,\ b < 0,\ c < 0$.

Пример 4. Найти координаты точек пересечения графиков функций

$$y = 5 - x, \quad y = x^2 - 3x + 2.$$

Решение. Координаты $(x; y)$ каждой точки пересечения графиков указанных функций удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} y = 5 - x, \\ y = x^2 - 3x + 2. \end{cases}$$

Поэтому,

$$x^2 - 3x + 2 = 5 - x,\ x^2 - 2x - 3 = 0,\ x_1 = -1,\ x_2 = 3,$$
$$y_1 = 5 - x_1 = 6,\ y_2 = 5 - x_2 = 2.$$

Ответ: $(-1; 6), (3; 2)$.

Пример 5. Найти все значения параметра p, при которых один из корней уравнения

$$(p-2)x^2 - (p-4)x - 2 = 0$$

на 3 больше другого.

Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни данного уравнения. По условию задачи и в соответствии с теоремой Виета числа x_1, x_2, p удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{p-4}{p-2}, \\ x_1 \cdot x_2 = -\dfrac{2}{p-2}, \\ x_2 = x_1 + 3. \end{cases}$$

Решим эту систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{p-4}{p-2} \\ x_1 \cdot x_2 = -\dfrac{2}{p-2} \\ x_2 = x_1 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_1 + 3 = \dfrac{p-4}{p-2} \\ x_1 \cdot (x_1 + 3) = -\dfrac{2}{p-2} \\ x_2 = x_1 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3 = \dfrac{p-4}{p-2} \\ x_1 \cdot (x_1 + 3) = -\dfrac{2}{p-2} \\ x_2 = x_1 + 3 \end{cases}$$

Из первого уравнений полученной системы находим:

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{p-4}{p-2} - 3\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{p-4-3p+6}{p-2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-2p+2}{p-2}\right) = -\frac{p-1}{p-2}.$$

Подставим полученное выражение во второе уравнение системы:

$$x_1 \cdot (x_1 + 3) = -\left(\frac{p-1}{p-2}\right) \cdot \left(-\frac{p-1}{p-2} + 3\right) = -\left(\frac{p-1}{p-2}\right)\left(\frac{3p-6-p+1}{p-2}\right) =$$

$$= -\left(\frac{p-1}{p-2}\right)\left(\frac{2p-5}{p-2}\right) = -\frac{2}{p-2}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{p-1}{p-2}\right)\left(\frac{2p-5}{p-2}\right)=\frac{2}{p-2}\Rightarrow(p-1)(2p-5)=2(p-2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2p^2-2p-5p+5=2p-4\Leftrightarrow 2p^2-9p+9=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} p_1=\dfrac{9-\sqrt{81-72}}{4}=\dfrac{9-3}{4}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}, \\ p_2=\dfrac{9+\sqrt{81-72}}{4}=\dfrac{9+3}{4}=\dfrac{12}{4}=3. \end{cases}$$

Ответ: $p_1=\dfrac{3}{2},\ p_2=3.$

Пример 6. Найти все значения параметра *p*, при которых отношение корней уравнения

$$px^2-(p+3)x+3=0$$

равно (-2).

Решение. Пусть x_1 и x_2 – корни данного уравнения. По условию задачи и в соответствии с теоремой Виета числа x_1, x_2, p удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{p+3}{p}, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{3}{p}, \\ x_2=-2x_1. \end{cases}$$

Решим эту систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{p+3}{p} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{3}{p} \\ x_2=-2x_1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -x_1=\dfrac{p+3}{p} \\ -2x_1^2=\dfrac{3}{p} \\ x_2=-2x_1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_1=-\dfrac{p+3}{p} \\ -2\left(-\dfrac{p+3}{p}\right)^2=\dfrac{3}{p} \\ x_2=-2x_1 \end{cases}$$

Из второго уравнения полученной системы находим:

$$-2\left(-\frac{p+3}{p}\right)^2=\frac{3}{p}\Rightarrow 2(p+3)^2=-3p\Leftrightarrow 2p^2+12p+18=-3p\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2p^2+15p+18=0\Leftrightarrow\begin{cases} p_1=\dfrac{-15-\sqrt{225-144}}{4}=\dfrac{-15-9}{4}=-6 \\ p_2=\dfrac{-15+\sqrt{225-144}}{4}=\dfrac{-15+9}{4}=-\dfrac{6}{4}=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Ответ: $p_1=-6,\ p_2=-\dfrac{3}{2}.$

Пример 7. Найти все значения параметра p, при которых сумма квадратов корней уравнения

$$x^2-(2p+1)x+p^2+p-2=0$$

минимальна. Чему равно минимальное значение?

Решение. Поскольку дискриминант уравнения

$$D=(2p+1)^2-4\left(p^2+p-2\right)=4p^2+4p+1-4p^2-4p+8=9,$$

то корни уравнения

$$x_1=\frac{2p+1-3}{4}=\frac{2p-2}{4}=\frac{1}{2}(p-1),\ x_2=\frac{2p+1+3}{4}=\frac{2p+4}{4}=\frac{1}{2}(p+2).$$

Следовательно,

$$x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}=\frac{1}{4}(p-1)^2+\frac{1}{4}(p+2)^2=\frac{1}{4}(p^2-2p+1+p^2+4p+4)=$$

$$=\frac{1}{4}(p^2+2p+5)=\frac{p^2}{4}+\frac{p}{2}+\frac{5}{4},$$

причем функция

$$f(p)=\frac{p^2}{4}+\frac{p}{2}+\frac{5}{4}$$

достигает минимума в точке

$$p_v=\left.-\frac{1}{2}\middle/2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\right.=-1.$$

Наименьшее значение этой функции равно

$$f(1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{5}{4}=\frac{8}{4}=2.$$

Ответ: минимальное значение суммы квадратов корней уравнения равно 2 и достигается при $p=-1$.

Пример 8. Найти все значения параметра *p*, при которых неравенство

$$px^2+8px+7p-2<0$$

выполняется при всех значениях *x*.

Решение. Рассмотрим 3 случая: $p>0$, $p=0$, $p<0$.

1. Число *p* не может быть положительным, т. к. в этом случае ветви параболы направлены вверх и обязательно найдутся такие значения *x*, при которых значения квадратного трехчлена, стоящего в левой части неравенства, будут положительными.

2. В случае $p=0$ неравенство выполняется при всех значениях *x*.

3. В случае $p<0$ ветви параболы направлены вниз и для выполнимости неравенства при всех значениях *x* необходимо и достаточно, чтобы квадратный трехчлен из левой части неравенства не имел корней. Другими словами, его дискриминант должен быть отрицательным:

$$D=64p^2-4p(7p-2)<0\Leftrightarrow 36p^2+8p<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p(p+\frac{2}{9})<0\Leftrightarrow p\in\left(-\frac{2}{9},0\right)$$

Добавляя к найденному интервалу точку $p=0$, получаем ответ задачи.

Ответ: $p\in(-\frac{2}{9},0]$

Пример 9. Найти все значения параметра *p*, при которых уравнение

$$(p+3)x^2+8x+p^2+5p=0$$

имеет корни разных знаков.

Решение. В случае $p=-3$ уравнение имеет вид $8x-6=0$ и обладает **единственным** корнем $x=\frac{3}{4}$, что не удовлетворяет условию задачи. Следовательно, $p \neq -3$ и уравнение можно разделить на отличное от нуля число $(p+3)$. В результате оно преобразуется к виду:

$$x^2+\frac{8}{p+3}x+\frac{p(p+5)}{p+3}=0 .$$

Если, x_1 и x_2 — корни этого уравнения, то, по теореме Виета,

$$x_1x_2=\frac{p(p+5)}{p+3},$$

причем в случае, когда корни имеют разные знаки, их произведение отрицательно и выполняется неравенство

$$\frac{p(p+5)}{p+3}<0.$$

С другой стороны, если это неравенство выполняется, то дискриминант уравнения

$$D=\left(\frac{8}{p+3}\right)^2-4\cdot\frac{p(p+5)}{p+3}>0,$$

и уравнение имеет два различных корня. Таким образом, наша задача свелась к неравенству

$$\frac{p(p+5)}{p+3}<0.$$

Решая это неравенство с помощью метода интервалов, получаем ответ задачи.

Ответ: $p\in(-\infty,-5)\cup(-3,0)$

Пример 10. Найти все значения параметра *p*, при которых корни уравнения

$$x^2-px+1=0$$

лежат в интервале (0, 3).

Решение. Для существования корней необходимо и достаточно, чтобы дискриминант уравнения был неотрицателен:

$$D = p^2 - 4 \ge 0 \Leftrightarrow p^2 \ge 4 \Leftrightarrow |p| \ge 2 \Leftrightarrow p \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty).$$

Теперь найдем корни уравнения:

$$x_1 = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4}}{2}, \quad x_2 = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4}}{2}.$$

Таким образом, условие задачи можно записать в форме системы неравенств:

$$\begin{cases} 0 < \dfrac{p - \sqrt{p^2 - 4}}{2} \\ \dfrac{p + \sqrt{p^2 - 4}}{2} < 3 \\ p \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < p - \sqrt{p^2 - 4} \\ p + \sqrt{p^2 - 4} < 6 \\ p \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{p^2 - 4} < p \\ \sqrt{p^2 - 4} < 6 - p \\ p \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p^2 - 4 < p^2 \\ p > 0 \\ p^2 - 4 < p^2 - 12p + 36 \\ p < 6 \\ p \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < 0 \\ p > 0 \\ 12p < 40 \\ p < 6 \\ p \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow p \in [2, \frac{10}{3}).$$

Ответ: $p \in [2, \frac{10}{3})$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти все значения параметра a, при которых один из корней уравнения

$$-2x^2 - 3ax + 7a = 0$$

равен 3.

2. Сократить дробь

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{2x - 6}$$

3. Найти координаты точек пересечения графиков функций

$$y = 3x^2 - 7x - 2 = 0, \quad y = 2x^2 - 5x + 6.$$

4. Найти все значения параметра *p*, при которых один из корней уравнения

$$x^2 - (2p+1)x + 20p^2 = 0$$

в 5 раз больше другого.

5. Найти все значения параметра *p*, при которых один из корней уравнения

$$x^2 + px - 4p + 16 = 0$$

на 4 больше другого.

6. Найти все значения параметра *p*, при которых сумма кубов корней уравнения

$$x^2 + 2x - p^2 + 4p - 3 = 0$$

минимальна. Чему равно минимальное значение?

7. Найти все значения параметра *p*, при которых неравенство

$$px^2 - 5px + 2p + 3 > 0$$

выполняется при всех значениях *x*.

8. Найти все значения параметра *p*, при которых уравнение

$$(p+1)x^2 + 11x + 3p^2 + 7p = 0$$

имеет корни разных знаков.

9. Найти все значения параметра *p*, при которых корни уравнения

$$x^2 - 4(p+2)x + 2p^2 + 2 = 0$$

меньше 2.

10. Известно, что квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет корней и его коэффициенты связаны соотношением $4a - 2b + c < 0$. Найти знаки коэффициентов a и c.