

Доктор физико-математических наук, профессор

К. Л. САМАРОВ

КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

Учебно-методическое пособие для школьников

© К. Л. Самаров, 2010

Квадратным трехчленом относительно x называют многочлен 2-й степени

$$ax^2 + bx + c,$$

где a, b, c - числа, называемые коэффициентами квадратного трехчлена, $a \neq 0$.

Квадратным уравнением называют уравнение относительно x вида:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Решения квадратного уравнения, т.е. значения x , при которых квадратный трехчлен обращается в нуль, называют **корнями** квадратного трехчлена (уравнения).

Пример 1. Найти все значения параметра p , при которых один из корней уравнения

$$-3x^2 + 2px + 8p = 0$$

равен 2.

Решение. Подставив в уравнение число $x = 2$, получим

$$\begin{aligned} -3 \cdot 2^2 + 2p \cdot 2 + 8p &= 12p - 12 = 0, \\ 12p &= 12, \quad p = 2. \end{aligned}$$

Ответ: $p = 2$.

Выделением полного квадрата называют представление квадратного трехчлена в виде:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Чтобы получить эту формулу, проведем следующие вычисления, основой которых является формула для **квадрата суммы двух слагаемых**:

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{c}{a}\right) = \\
 &= a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = \\
 &= a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + a \cdot \frac{c}{a} = a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} = \\
 &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.
 \end{aligned}$$

Выделение полного квадрата позволяет также найти **корни** квадратного трехчлена.

Действительно, если квадратный трехчлен имеет корни, то

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0 \Leftrightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}
 \end{aligned}$$

Поскольку левая часть последнего выражения неотрицательна, то для того, чтобы у уравнения существовали корни, необходимо и достаточно, чтобы и правая часть была неотрицательной, а это возможно лишь в том случае, когда число

$$D = b^2 - 4ac,$$

называемое **дискриминантом квадратного уравнения**, больше или равно нулю. При этом

$$\begin{aligned}
 x + \frac{b}{2a} &= \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x &= -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.
 \end{aligned}$$

Итак, **формула корней квадратного уравнения** имеет вид:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Если дискриминант положителен, то квадратное уравнение имеет два различных корня. Если дискриминант равен нулю, то квадратное уравнение имеет два совпавших корня. Если дискриминант отрицателен, то квадратное уравнение корней не имеет.

Из формулы для корней квадратного уравнения вытекает **теорема Виета**:
Корни квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

Действительно, если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения, то

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a},$$

Таким образом, первое уравнение системы выполнено. Чтобы проверить выполнимость второго уравнения системы, нужно воспользоваться одной из формул сокращенного умножения, а именно, **формулой разности квадратов двух чисел**:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \cdot \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} = \\ &= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Теорема Виета доказана.

Справедлива и **обратная теорема Виета**:

Если пара чисел (u, v) является решением системы уравнений

$$\begin{cases} u + v = -\frac{b}{a}, \\ u \cdot v = \frac{c}{a}, \end{cases}$$

то эти числа u и v являются корнями квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Очень важной является **формула разложения квадратного трехчлена на множители**. Чтобы получить эту формулу, проведем следующие вычисления, основой которых является теорема Виета:

$$\begin{aligned} a(x - x_1)(x - x_2) &= a(x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1x_2) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2) = \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = ax^2 + bx + c. \end{aligned}$$

Таким образом, **если дискриминант квадратного трехчлена неотрицателен, то квадратный трехчлен раскладывается на множители:**

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

При этом в случае, **когда дискриминант равен нулю**, выполняется соотношение $x_1 = x_2$ и **разложение на множители имеет вид:**

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

Пример 2. Сократить дробь

$$\frac{x^2 + 6x - 7}{x + 7}$$

Решение. Разложим сначала квадратный трехчлен, стоящий в числителе дроби, на множители:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x - 7 = 0, x_{1,2} &= \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 28}}{2} = \frac{-6 \pm 8}{2}, x_1 = -7, x_2 = 1, \\ x^2 + 6x - 7 &= (x + 7)(x - 1). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{x^2 + 6x - 7}{x + 7} = \frac{(x + 7)(x - 1)}{x + 7} = x - 1.$$

Ответ: $x - 1$.

Перейдем теперь к свойствам графика квадратного трехчлена.

График функции $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) называется **параболой**. На рис.1 изображен график параболы $y = x^2$.

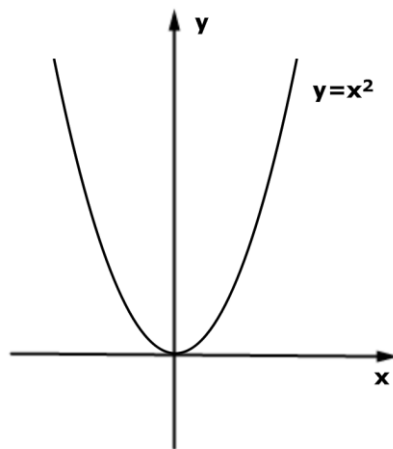


Рис. 1

При $a > 0$ ветви параболы $y = ax^2$ направлены вверх. При $a < 0$ ветви параболы направлены вниз. Вершина параболы совпадает с началом системы координат.

В соответствии с формулой

$$ax^2 + bx + c = 0 = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

графиком функции (квадратного трехчлена) $y = ax^2 + bx + c$ является парабола $y = ax^2$, сдвинутая так, чтобы ее вершина (Рис. 2) попала в точку $M_v = (x_v; y_v)$, где

$$x_v = -\frac{b}{2a},$$

$$y_v = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = -\frac{b^2}{4a} + c = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{D}{4a}.$$

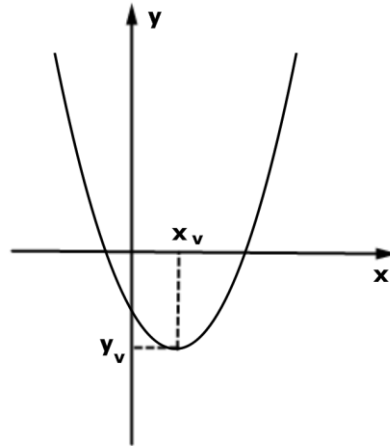


Рис. 2

Последнюю формулу запоминать не нужно. Значение y_v вычисляется при помощи подстановки координаты вершины $x = -\frac{b}{2a}$ в формулу $y = ax^2 + bx + c$.

Парабола $y = ax^2 + bx + c$ пересекает ось OY в точке с координатами $(0, c)$. При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх. При $a < 0$ ветви параболы направлены вниз. В случае $a > 0$ функция $y = ax^2 + bx + c$ в точке x_v достигает наименьшего значения. В случае $a < 0$ функция $y = ax^2 + bx + c$ в точке x_v достигает наибольшего значения.

Если квадратный трехчлен имеет два различных корня (дискриминант положителен), то парабола пересекает ось OX в точках с координатами $(x_1; 0)$ и $(x_2; 0)$.

Если квадратный трехчлен имеет два совпавших корня (дискриминант равен 0), то парабола **касается** оси OX в точке с координатой $(x_v; 0)$. В этом случае

$$x_1 = x_2 = x_v = -\frac{b}{2a}.$$

Если квадратный трехчлен корней не имеет (дискриминант отрицателен), то парабола ось OX вообще не пересекает.

Пример 3. Определить знаки коэффициентов a, b, c , исходя из расположения параболы $ax^2 + bx + c$, изображенной на рис. 2, относительно осей координат (стр. 6).

Решение. Поскольку ветви параболы направлены вверх, то $a > 0$. Поскольку парабола пересекает ось OY в точке с отрицательной ординатой, то $c < 0$. Поскольку x -я координата вершины параболы $x_v = -\frac{b}{2a} > 0$, то, в силу того, что $a > 0$, заключаем, что $b < 0$.

Ответ: $a > 0, b < 0, c < 0$.

Пример 4. Найти координаты точек пересечения графиков функций

$$y = 5 - x, \quad y = x^2 - 3x + 2.$$

Решение. Координаты $(x; y)$ каждой точки пересечения графиков указанных функций удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} y = 5 - x, \\ y = x^2 - 3x + 2. \end{cases}$$

Поэтому,

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 2 = 5 - x, \quad x^2 - 2x - 3 = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 3, \\ y_1 = 5 - x_1 = 6, \quad y_2 = 5 - x_2 = 2. \end{aligned}$$

Ответ: $(-1; 6), (3; 2)$.

Пример 5. Найти все значения параметра p , при которых один из корней уравнения

$$(p-2)x^2 - (p-4)x - 2 = 0$$

на 3 больше другого.

Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни данного уравнения. По условию задачи и в соответствии с теоремой Виета числа x_1, x_2, p удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{p-4}{p-2}, \\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{2}{p-2}, \\ x_2 = x_1 + 3. \end{cases}$$

Решим эту систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{p-4}{p-2} \\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{2}{p-2} \\ x_2 = x_1 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_1 + 3 = \frac{p-4}{p-2} \\ x_1 \cdot (x_1 + 3) = -\frac{2}{p-2} \\ x_2 = x_1 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3 = \frac{p-4}{p-2} \\ x_1 \cdot (x_1 + 3) = -\frac{2}{p-2} \\ x_2 = x_1 + 3 \end{cases}$$

Из первого уравнений полученной системы находим:

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{p-4}{p-2} - 3 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{p-4-3p+6}{p-2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{-2p+2}{p-2} \right) = -\frac{p-1}{p-2}.$$

Подставим полученное выражение во второе уравнение системы:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot (x_1 + 3) &= -\left(\frac{p-1}{p-2} \right) \cdot \left(-\frac{p-1}{p-2} + 3 \right) = -\left(\frac{p-1}{p-2} \right) \left(\frac{3p-6-p+1}{p-2} \right) = \\ &= -\left(\frac{p-1}{p-2} \right) \left(\frac{2p-5}{p-2} \right) = -\frac{2}{p-2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left(\frac{p-1}{p-2}\right)\left(\frac{2p-5}{p-2}\right) &= \frac{2}{p-2} \Rightarrow (p-1)(2p-5) = 2(p-2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2p^2 - 2p - 5p + 5 = 2p - 4 \Leftrightarrow 2p^2 - 9p + 9 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = \frac{9 - \sqrt{81 - 72}}{4} = \frac{9 - 3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, \\ p_2 = \frac{9 + \sqrt{81 - 72}}{4} = \frac{9 + 3}{4} = \frac{12}{4} = 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $p_1 = \frac{3}{2}, p_2 = 3$.

Пример 6. Найти все значения параметра p , при которых отношение корней уравнения

$$px^2 - (p+3)x + 3 = 0$$

равно (-2).

Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни данного уравнения. По условию задачи и в соответствии с теоремой Виета числа x_1, x_2, p удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{p+3}{p}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{3}{p}, \\ x_2 = -2x_1. \end{cases}$$

Решим эту систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{p+3}{p} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{3}{p} \\ x_2 = -2x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 = \frac{p+3}{p} \\ -2x_1^2 = \frac{3}{p} \\ x_2 = -2x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{p+3}{p} \\ -2\left(-\frac{p+3}{p}\right)^2 = \frac{3}{p} \\ x_2 = -2x_1 \end{cases}$$

Из второго уравнения полученной системы находим:

$$-2\left(-\frac{p+3}{p}\right)^2 = \frac{3}{p} \Rightarrow 2(p+3)^2 = -3p \Leftrightarrow 2p^2 + 12p + 18 = -3p \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2p^2 + 15p + 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = \frac{-15 - \sqrt{225 - 144}}{4} = \frac{-15 - 9}{4} = -6 \\ p_2 = \frac{-15 + \sqrt{225 - 144}}{4} = \frac{-15 + 9}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Ответ: $p_1 = -6, p_2 = -\frac{3}{2}$.

Пример 7. Найти все значения параметра p , при которых сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 - (2p+1)x + p^2 + p - 2 = 0$$

минимальна. Чему равно минимальное значение?

Решение. Поскольку дискриминант уравнения

$$D = (2p+1)^2 - 4(p^2 + p - 2) = 4p^2 + 4p + 1 - 4p^2 - 4p + 8 = 9,$$

то корни уравнения

$$x_1 = \frac{2p+1-3}{4} = \frac{2p-2}{4} = \frac{1}{2}(p-1), x_2 = \frac{2p+1+3}{4} = \frac{2p+4}{4} = \frac{1}{2}(p+2).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= \frac{1}{4}(p-1)^2 + \frac{1}{4}(p+2)^2 = \frac{1}{4}(p^2 - 2p + 1 + p^2 + 4p + 4) = \\ &= \frac{1}{4}(p^2 + 2p + 5) = \frac{p^2}{4} + \frac{p}{2} + \frac{5}{4}, \end{aligned}$$

причем функция

$$f(p) = \frac{p^2}{4} + \frac{p}{2} + \frac{5}{4}$$

достигает минимума в точке

$$p_v = \frac{-\frac{1}{2}}{2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)} = -1.$$

Наименьшее значение этой функции равно

$$f(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{5}{4} = \frac{8}{4} = 2.$$

Ответ: минимальное значение суммы квадратов корней уравнения равно 2 и достигается при $p = -1$.

Пример 8. Найти все значения параметра p , при которых неравенство

$$px^2 + 8px + 7p - 2 < 0$$

выполняется при всех значениях x .

Решение. Рассмотрим 3 случая: $p > 0$, $p = 0$, $p < 0$.

1. Число p не может быть положительным, т. к. в этом случае ветви параболы направлены вверх и обязательно найдутся такие значения x , при которых значения квадратного трехчлена, стоящего в левой части неравенства, будут положительными.

2. В случае $p = 0$ неравенство выполняется при всех значениях x .

3. В случае $p < 0$ ветви параболы направлены вниз и для выполнимости неравенства при всех значениях x необходимо и достаточно, чтобы квадратный трехчлен из левой части неравенства не имел корней. Другими словами, его дискриминант должен быть отрицательным:

$$\begin{aligned} D = 64p^2 - 4p(7p - 2) < 0 &\Leftrightarrow 36p^2 + 8p < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow p\left(p + \frac{2}{9}\right) < 0 \Leftrightarrow p \in \left(-\frac{2}{9}, 0\right) \end{aligned}$$

Добавляя к найденному интервалу точку $p = 0$, получаем ответ задачи.

Ответ: $p \in \left(-\frac{2}{9}, 0\right]$

Пример 9. Найти все значения параметра p , при которых уравнение

$$(p + 3)x^2 + 8x + p^2 + 5p = 0$$

имеет корни разных знаков.

Решение. В случае $p = -3$ уравнение имеет вид $8x - 6 = 0$ и обладает **единственным** корнем $x = \frac{3}{4}$, что не удовлетворяет условию задачи. Следовательно, $p \neq -3$ и уравнение можно разделить на отличное от нуля число $(p + 3)$. В результате оно преобразуется к виду:

$$x^2 + \frac{8}{p+3}x + \frac{p(p+5)}{p+3} = 0.$$

Если, x_1 и x_2 — корни этого уравнения, то, по теореме Виета,

$$x_1 x_2 = \frac{p(p+5)}{p+3},$$

причем в случае, когда корни имеют разные знаки, их произведение отрицательно и выполняется неравенство

$$\frac{p(p+5)}{p+3} < 0.$$

С другой стороны, если это неравенство выполняется, то дискриминант уравнения

$$D = \left(\frac{8}{p+3} \right)^2 - 4 \cdot \frac{p(p+5)}{p+3} > 0,$$

и уравнение имеет два различных корня. Таким образом, наша задача свелась к неравенству

$$\frac{p(p+5)}{p+3} < 0.$$

Решая это неравенство с помощью метода интервалов, получаем ответ задачи.

Ответ: $p \in (-\infty, -5) \cup (-3, 0)$

Пример 10. Найти все значения параметра p , при которых корни уравнения

$$x^2 - px + 1 = 0$$

лежат в интервале $(0, 3)$.

Решение. Для существования корней необходимо и достаточно, чтобы дискриминант уравнения был неотрицателен:

$$D = p^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow p^2 \geq 4 \Leftrightarrow |p| \geq 2 \Leftrightarrow p \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty).$$

Теперь найдем корни уравнения:

$$x_1 = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4}}{2}, \quad x_2 = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4}}{2}.$$

Таким образом, условие задачи можно записать в форме системы неравенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < \frac{p - \sqrt{p^2 - 4}}{2} \\ \frac{p + \sqrt{p^2 - 4}}{2} < 3 \\ p \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 < p - \sqrt{p^2 - 4} \\ p + \sqrt{p^2 - 4} < 6 \\ p \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{p^2 - 4} < p \\ \sqrt{p^2 - 4} < 6 - p \\ p \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} p^2 - 4 < p^2 \\ p > 0 \\ p^2 - 4 < p^2 - 12p + 36 \\ p < 6 \\ p \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -4 < 0 \\ p > 0 \\ 12p < 40 \\ p < 6 \\ p \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) \end{array} \right. \Leftrightarrow p \in [2, \frac{10}{3}).$$

Ответ: $p \in [2, \frac{10}{3}).$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти все значения параметра a , при которых один из корней уравнения

$$-2x^2 - 3ax + 7a = 0$$

равен 3.

2. Сократить дробь

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{2x - 6}$$

3. Найти координаты точек пересечения графиков функций

$$y = 3x^2 - 7x - 2 = 0, \quad y = 2x^2 - 5x + 6.$$

4. Найти все значения параметра p , при которых один из корней уравнения

$$x^2 - (2p + 1)x + 20p^2 = 0$$

в 5 раз больше другого.

5. Найти все значения параметра p , при которых один из корней уравнения

$$x^2 + px - 4p + 16 = 0$$

на 4 больше другого.

6. Найти все значения параметра p , при которых сумма кубов корней уравнения

$$x^2 + 2x - p^2 + 4p - 3 = 0$$

минимальна. Чему равно минимальное значение?

7. Найти все значения параметра p , при которых неравенство

$$px^2 - 5px + 2p + 3 > 0$$

выполняется при всех значениях x .

8. Найти все значения параметра p , при которых уравнение

$$(p + 1)x^2 + 11x + 3p^2 + 7p = 0$$

имеет корни разных знаков.

9. Найти все значения параметра p , при которых корни уравнения

$$x^2 - 4(p + 2)x + 2p^2 + 2 = 0$$

меньше 2.

10. Известно, что квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет корней и его коэффициенты связаны соотношением $4a - 2b + c < 0$. Найти знаки коэффициентов a и c .