Учебный центр «Резольвента»

К. Л. САМАРОВ, С.С. САМАРОВА

ТРИГОНОМЕТРИЯ В ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

Учебно-методическое пособие для подготовки к ЕГЭ по математике

Целью данного учебного пособия является помощь школьникам в подготовке к ЕГЭ по математике по разделу «Тригонометрия». В учебном пособии проводится анализ и даются решения типовых задач по тригонометрии, предлагаемых с 2007 года по 2012 год Московским институтом открытого образования в различных контрольных, диагностических, тренировочных, демонстрационных и экзаменационных работах по математике для школьников 10 и 11 классов.

Задача 1. Найдите множество значений функции

$$y = 2\cos 3x + 4.$$

Решение. Из неравенства

$$-1 \le \cos t \le 1, \quad t \in (-\infty;\infty)$$

в результате замены $t = 3x$ следует неравенство

$$-1 \le \cos 3x \le 1,\ \ x \in (-\infty; \infty)$$

из которого получаем:

$$-1 \le \cos 3x \le 1 \ \ \Rightarrow -2 \le 2\cos 3x \le 2 \ \ \Rightarrow -2+4 \le 2\cos 3x + 4 \le 2+4 \ \ \Rightarrow 2 \le 2\cos 3x + 4 \le 6.$$

Ответ. $2 \le y \le 6.$

Похожая задача для самостоятельного решения.

Найдите множество значений функции

$$y = 2\cos 3x + 4.$$

Задача 2. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}\frac{x}{7} = \frac{1}{7}.$$

Решение. $\operatorname{tg}\frac{x}{7} = \frac{1}{7} \Leftrightarrow \frac{x}{7} = \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \pi n,\ n \in Z \Leftrightarrow x = 7\operatorname{arctg}\frac{1}{7} + 7\pi n,\ n \in Z.$

Ответ. $7\operatorname{arctg}\frac{1}{7} + 7\pi n,\ n \in Z$

Похожие задачи для самостоятельного решения.

Решите уравнения:

1. $\operatorname{tg}\frac{x}{3} = \frac{1}{3},$
2. $\cos\frac{x}{6} = -1,$
3. $\sin\frac{x}{4} = 1,$
4. $2\sin\frac{x}{6} = \sqrt{3}.$

Задача 3. Решите уравнение

$$x^2 + 6x + 12 = \sqrt{\cos 2\pi x + 8}.$$

Решение. Преобразуем левую часть уравнения, выделяя полный квадрат:

$$x^2+6x+12=x^2+2\cdot 3x+9+3=(x+3)^2+3.$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$(x+3)^2+3\ge 3,$$

причем знак равенства достигается в нем лишь при $x=-3$.

Рассматривая правую часть исходного уравнения, замечаем, что поскольку

$$\cos 2\pi x\le 1,$$

то выполняется неравенство

$$\cos 2\pi x+8\le 9.$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\sqrt{\cos 2\pi x+8}\le 3,$$

причем знак равенства достигается в нем лишь тогда, когда выполнено соотношение

$$\cos 2\pi x=1.$$

Таким образом, при всех значениях переменной $x\in(-\infty;\infty)$ выполняется неравенство

$$x^2+6x+12\ge 3\ge\sqrt{\cos 2\pi x+8}. \qquad (1)$$

Поскольку

$$\cos(2\pi\cdot(-3))=1,$$

то единственным случаем, когда в неравенстве (1) оба знака неравенства превращаются в знаки равенства, является случай $x = -3$. Следовательно, число $x = -3$ и является корнем исходного уравнения.

Ответ. -3.

Похожая задача для самостоятельного решения.

Решите уравнение

$$x^2 - 16x + 67 = \sqrt{\sin\frac{\pi x}{16} + 8}$$

Задача 4. Решите уравнение

$$2^{x^2 - 4x + 6} = \cos \pi x + 3$$

Решение. Преобразуем левую часть уравнения, выделяя в квадратном трёхчлене полный квадрат:

$$2^{x^2 - 4x + 6} = 2^{x^2 - 4x + 4 + 2} = 2^{(x-2)^2 + 2} = 4 \cdot 2^{(x-2)^2}.$$

Поскольку

$$(x-2)^2 \geq 0,$$

то

$$2^{(x-2)^2} \geq 1,$$

и справедливо неравенство

$$4 \cdot 2^{(x-2)^2} \geq 4,$$

причем знак равенства достигается в нем лишь при $x = 2$.

Рассматривая правую часть исходного уравнения, замечаем, что поскольку

$$\cos \pi x \le 1,$$

то выполняется неравенство

$$\cos \pi x + 3 \le 4,$$

причем знак равенства достигается в нем лишь тогда, когда выполнено соотношение

$$\cos \pi x = 1.$$

Таким образом, при всех значениях переменной $x \in (-\infty; \infty)$ выполняется неравенство

$$2^{x^2-4x+6} \ge 4 \ge \cos \pi x + 3. \qquad (2)$$

Поскольку

$$\cos(\pi \cdot 2) = 1,$$

то единственным случаем, когда в неравенстве (2) оба знака неравенства превращаются в знаки равенства, является случай $x = 2$. Следовательно, число $x = 2$ и является корнем исходного уравнения.

Ответ. 2.

Похожие задачи для самостоятельного решения.

Решите уравнения:

1. $5^{x^2-2x+2} = 4 - \cos \pi x,$
2. $7^{-3+4x-x^2} = 8 - \cos \pi x.$

Задача 5. Решите уравнение

$$4x^2 - 20x + 28 = \left(\sqrt{3} - \cos 3\pi x\right)\left(\sqrt{3} + \cos 3\pi x\right)$$

Решение. Преобразуем уравнение к следующему виду:

$$4x^2-20x+28=\left(\sqrt{3}-\cos 3\pi x\right)\left(\sqrt{3}+\cos 3\pi x\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-20x+28=3-\cos^2 3\pi x\Leftrightarrow 4x^2-20x+25+\cos^2 3\pi x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x-5)^2+\cos^2 3\pi x=0.$$

Поскольку

$$(2x-5)^2\ge 0,\quad \cos^2 3\pi x\ge 0,$$

то

$$(2x-5)^2+\cos^2 3\pi x=0\Leftrightarrow\begin{cases}2x-5=0\\ \cos 3\pi x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{2}\\ \cos\dfrac{15\pi}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}.$$

Ответ. $\frac{5}{2}$.

Похожая задача для самостоятельного решения.

Решите уравнение:

$$4x^2+20x+30=\left(\sqrt{5}-\sin 2\pi x\right)\left(\sqrt{5}+\sin 2\pi x\right)$$

Задача 6. Решите уравнение

$$(2\sin x-1)\left(\sqrt{-\cos x}+1\right)=0$$

Решение. Поскольку

$$\sqrt{-\cos x}\ge 0,$$

то

$$\sqrt{-\cos x}+1>0.$$

Следовательно,

$$(2\sin x-1)\left(\sqrt{-\cos x}+1\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin x-1=0, \\ -\cos x\geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x=\dfrac{1}{2}, \\ \cos x\leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\ \ x_2=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n, \\ \cos x\leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n.$$

Ответ. $\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n$

Похожая задача для самостоятельного решения.

Решите уравнение:

$$(2\cos x+1)\left(\sqrt{-\sin x}-1\right)=0$$

Задача 7. Решите уравнение

$$\frac{2\sin^2 x-5\sin x-3}{\sqrt{x+\dfrac{\pi}{6}}}=0$$

Решение. Сначала выпишем область допустимых значений уравнения:

$$x>-\frac{\pi}{6}. \qquad (3)$$

Теперь приравняем к нулю числитель дроби, стоящей в левой части уравнения:

$$2\sin^2 x-5\sin x-3=0 \Leftrightarrow (\sin x)_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25+4\cdot 3\cdot 2}}{4}=\frac{5\pm 7}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin x)_1=-\frac{1}{2},\ (\sin x)_2=3.$$

Поскольку, $-1\leq \sin x\leq 1$, то уравнение

$$\sin x=3$$

решений не имеет. Решая уравнение

$$\sin x = -\frac{1}{2},$$

получаем:

$$\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

В силу неравенства (3) отсюда получаем:

$$x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n > 0, \quad n \in Z,$$

$$x_2 = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \geq 0, \quad n \in Z.$$

Ответ. $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n > 0, \quad n \in Z; \quad \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \geq 0, \quad n \in Z.$

Похожая задача для самостоятельного решения.

Решите уравнение:

$$\frac{2\cos^2 x + 5\cos x - 3}{\sqrt{x - \frac{\pi}{3}}} = 0$$

Задача 8. Решите уравнение

$$\frac{4\cos^2 x + 8\sin x - 7}{\sqrt{-\operatorname{tg} x}} = 0$$

Решение. Приравняем к нулю числитель дроби, стоящей в левой части уравнения, и воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$4\cos^2 x + 8\sin x - 7 = 0 \Leftrightarrow 4\left(1 - \sin^2 x\right) + 8\sin x - 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 - 4\sin^2 x + 8\sin x - 7 = 0 \Leftrightarrow 4\sin^2 x - 8\sin x + 3 = 0.$$

Теперь решим полученное уравнение:

$$4\sin^2 x - 8\sin x + 3 = 0 \Leftrightarrow (\sin x)_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4\cdot 3\cdot 4}}{8} = \frac{8\pm 4}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sin x)_1 = \frac{1}{2}, (\sin x)_2 = \frac{3}{2}.$$

Поскольку, $-1 \le \sin x \le 1$, то уравнение

$$\sin x = \frac{3}{2}$$

решений не имеет. Решая уравнение

$$\sin x = \frac{1}{2},$$

получаем

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in Z. \qquad (4)$$

Поскольку каждое решение исходного уравнения должно удовлетворять неравенству

$$-\operatorname{tg} x > 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x < 0,$$

то первая серия корней в формулах (4) должна быть отброшена.

Ответ. $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in Z$

Похожие задачи для самостоятельного решения

1. Решите уравнение:

$$\frac{-4\sin^2 x + 8\cos x + 7}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}} = 0$$

2. Найдите корни уравнения

$$2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x = 0,$$

удовлетворяющие неравенству $\sin x < 0.$

Задача 9. Решите уравнение

$$\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}\left(\operatorname{tg}2x - 1\right) = 0$$

Решение. Поскольку

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x;$$

$$\operatorname{tg}2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x},$$

то исходное уравнение можно переписать в виде:

$$\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}\left(\operatorname{tg}2x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}2x = 1, \\ \cos 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x)_1 = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad (2x)_2 = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in Z \\ \cos 2x > 0 \end{cases}$$

Так как вторая серия корней не удовлетворяет условию $\cos 2x > 0$, то она должна быть отброшена. Следовательно,

$$(2x)_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{8} + \pi n, n \in Z.$$

Ответ. $\dfrac{\pi}{8} + \pi n, n \in Z.$

Похожие задачи для самостоятельного решения.

Решите уравнения:

1. $\sqrt{\sin x \cdot \cos x}\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}2x} + 1\right) = 0,$

2. $\left(\operatorname{tg}^2 x - \sqrt{3}\operatorname{tg}x\right)\sqrt{-5\cos x} = 0.$

Задача 10. Решите уравнение

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)=\cos x.$$

Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$

Решение. Воспользовавшись формулой приведения

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)=\sin 2x,$$

преобразуем уравнение:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)=\cos x \Leftrightarrow \sin 2x=\cos x.$$

Решим полученное уравнение:

$$2\sin x\cos x-\cos x=0 \Leftrightarrow \cos x\left(2\sin x-1\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x=0 \ \bigcup \ 2\sin x-1=0 \Leftrightarrow \cos x=0 \ \bigcup \ \sin x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ x_2=\frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ x_3=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ x_4=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z.$$

Теперь найдем все значения $n\in Z$, при которых числа

$$x_1=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ x_2=\frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ x_3=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ x_4=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$$

будут лежать на отрезке $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$. Для этого заметим, что при $n<0,\ n\in Z$ все числа x_1, x_2, x_3, x_4 будут отрицательными, и, конечно же, не смогут попасть в указанный отрезок. Также заметим, что в указанный отрезок не попадают числа x_1, x_2, x_3, x_4, у которых $n=0$, а также числа, у которых

$n \ge 2,\ n \in Z.$ Остаётся выяснить, где располагаются числа $x_1, x_2, x_3, x_4,$ у которых $n = 1,$ т.е. числа

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2},\ x_2 = \frac{3\pi}{2} + 2\pi = \frac{7\pi}{2},\ x_3 = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6},\ x_4 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{17\pi}{6}.$$

Легко видеть, что из этих чисел на отрезок $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$ попадают числа

$x_1, x_2, x_4,$, а число x_3

не попадает.

Ответ. $\frac{5\pi}{2},\ \frac{7\pi}{2},\ \frac{17\pi}{6}.$

Похожие задачи для самостоятельного решения.

1.	Решите уравнение	$4\sin^2 x - 12\sin x + 5 = 0.$	Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку	$[-\pi; 2\pi]$
2.	Решите уравнение	$\log_5(\cos x - \sin 2x + 25) = 2.$	Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку	$\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$
3.	Решите уравнение	$\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} = \cos 2x.$	Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку	$\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$

4.	Решите уравнение	$\cos^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x + \cos x = \sin x.$	Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку	$\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$
5.	Решите уравнение	$2\sin 2x = 4\cos x - \sin x + 1.$	Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку	$\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$
6.	Решите уравнение	$-11\cos\left(-\frac{16\pi}{61}\right) - 54\sin\left(\frac{12\pi}{13}\right) + \cos 2x - -\cos\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) - 1 = = -11\cos\left(-\frac{16\pi}{61}\right) - 54\sin\left(\frac{12\pi}{13}\right).$	Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку	$\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
7.	Решите уравнение	$\sin x + \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right) = 0.$	Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку	$\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$
8.	Решите уравнение	$\sin 2x - 2\sqrt{3}\cos^2 x - 4\sin x + 4\sqrt{3}\cos x = 0.$	Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку	$\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

9.	Решите уравнение	$\cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$	Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку	$\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$
10	Решите уравнение	$\operatorname{tg} x + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) = 0.$	Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку	$\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$
11	Решите уравнение	$\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right).$	Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку	$\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$
12	Решите уравнение	$2\cos^2 x + 2\sin 2x = 3.$	Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку	$\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$
13	Решите уравнение	$4\sin^3 x = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$	Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку	$\left[\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$

Задача 11. Найти все решения уравнения

$$\left|\cos x - \frac{1}{4}\right| = 8\cos^2\frac{x}{2} - 5$$

на отрезке $[-\pi; \pi]$

Решение. Воспользовавшись формулой

$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2},$$

преобразуем уравнение:

$$\left|\cos x-\frac{1}{4}\right|=8\cos^2\frac{x}{2}-5\Leftrightarrow\left|\cos x-\frac{1}{4}\right|=8\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)-5\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left|\cos x-\frac{1}{4}\right|=4\cos x-1.$$

Таким образом, исходное уравнение принимает вид

$$\left|\cos x-\frac{1}{4}\right|=4\cos x-1. \qquad (5)$$

Для того, чтобы решить уравнение (5), рассмотрим два случая.

Случай 1.

$$\cos x-\frac{1}{4}\geq 0\Leftrightarrow\cos x\geq\frac{1}{4}.$$

В этом случае

$$\left|\cos x-\frac{1}{4}\right|=\cos x-\frac{1}{4},$$

и уравнение (5) принимает вид:

$$\cos x-\frac{1}{4}=4\cos x-1\Leftrightarrow 3\cos x=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\cos x=\frac{1}{4}.$$

Следовательно, в случае 1

$$x=\pm\arccos\frac{1}{4}+2\pi n,\ n\in Z.$$

Случай 2.

$$\cos x-\frac{1}{4}<0\Leftrightarrow\cos x<\frac{1}{4}.$$

В этом случае

$$\left|\cos x-\frac{1}{4}\right|=-\cos x+\frac{1}{4},$$

и уравнение (5) принимает вид:

$$-\cos x+\frac{1}{4}=4\cos x-1 \Leftrightarrow 5\cos x=\frac{5}{4} \Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{4}.$$

Следовательно, в случае 2 уравнение решений не имеет.

Таким образом, осуществляется только случай 1, и корни исходного уравнения определяются по формуле

$$x=\pm\arccos\frac{1}{4}+2\pi n,\ n\in Z.$$

Из этого множества корней только числа

$$\arccos\frac{1}{4} \quad \text{и} \quad -\arccos\frac{1}{4}$$

лежат на отрезке $[-\pi;\pi]$

Ответ. $\pm\arccos\frac{1}{4}.$

Задача 12. Найдите значение выражения

$$5\cos\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right),$$

если $\cos\alpha=-\frac{4}{5},\ \alpha\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right).$

Решение. Воспользовавшись формулой приведения, получим

$$5\cos\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)=-5\sin\alpha.$$

Поскольку $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$, то $\sin\alpha < 0$. Следовательно,

$$\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}.$$

Поэтому

$$-5\sin\alpha = (-5)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) = 3.$$

Ответ. 3.

Похожие задачи для самостоятельного решения.

1.	Найдите значение выражения	$15\sin^2 x - 8,$	если	$\cos^2 x = 0,6$
2.	Найдите значение выражения	$5\cos^2 x + 1,$	если	$\sin^2 x = 0,6$
3.	Найдите значение выражения	$4 + 5\operatorname{tg}^2 x \cdot \cos^2 x,$	если	$\sin x = \frac{1}{\sqrt{5}}$
4.	Найдите значение выражения	$7 - 6\operatorname{tg}^2 x \cdot \cos^2 x,$	если	$\sin x = \frac{1}{\sqrt{6}}$
5.	Найдите значение выражения	$26\sin\alpha,$	если	$\cos\alpha = \frac{12}{13},$ $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$
6.	Найдите значение выражения	$13\cos\alpha,$	если	$\sin\alpha = \frac{12}{13},$ $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

7.	Найдите значение выражения	$\cos\alpha$,	если	$\sin\alpha = -\frac{3\sqrt{11}}{10}$, $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$
8.	Найдите значение выражения	$\sin\alpha$,	если	$\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$, $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$
9.	Найдите значение выражения	$9\cos^2\alpha$,	если	$\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{\frac{4}{11}}$.
10.	Найдите значение выражения	$21\sin^2\alpha$,	если	$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{3}{11}}$.
11.	Найдите значение выражения	$-13\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$,	если	$\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$
12.	Найдите значение выражения	$\operatorname{tg}\alpha$,	если	$\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$
13.	Найдите значение выражения	$26\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$,	если	$\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Задача 13. Вычислите значение выражения

$$8\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}.$$

Решение. Воспользовавшись формулой «Синус двойного угла», получим

$$8\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}=4\cdot 2\cdot\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}=4\sin\frac{5\pi}{6}=4\cdot\frac{1}{2}=2$$

Ответ. 2.

Задача 14. Вычислите значение выражения

$$\sqrt{12}\cos^2\frac{5\pi}{12}-\sqrt{3}$$

Решение. Воспользовавшись формулой «Косинус двойного угла», получим

$$\sqrt{12}\cos^2\frac{5\pi}{12}-\sqrt{3}=\sqrt{12}\cdot\frac{1+\cos\frac{5\pi}{6}}{2}-\sqrt{3}=\sqrt{3}+\sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{6}-\sqrt{3}=$$

$$=\sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{6}=\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{3}{2}.$$

Ответ. $-\frac{3}{2}$.

Задача 15. Вычислите значение выражения

$$3-\frac{\sin 37^0\sin 53^0}{\sin 74^0}$$

Решение. Воспользовавшись одной из формул приведения и формулой «Синус двойного угла», получим

$$3-\frac{\sin 37^0\sin 53^0}{\sin 74^0}=3-\frac{\sin 37^0\sin\left(90^0-37^0\right)}{\sin 74^0}=3-\frac{\sin 37^0\cos 37^0}{\sin 74^0}=$$

$$=3-\frac{\sin 37^0\cos 37^0}{2\sin 37^0\cos 37^0}=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}.$$

Ответ. $\frac{5}{2}$.

Задача 16. Вычислите значение выражения

$$\log_4\left(\sin\frac{5\pi}{12}\cdot\sin\frac{5\pi}{6}\cdot\sin\frac{11\pi}{12}\right)$$

Решение. Воспользовавшись формулой приведения и формулой «Синус двойного угла», получим

$$\sin\frac{5\pi}{12}\cdot\sin\frac{5\pi}{6}\cdot\sin\frac{11\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\cdot\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{12}=$$

$$=\cos\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{8}.$$

Следовательно,

$$\log_4\left(\sin\frac{5\pi}{12}\cdot\sin\frac{5\pi}{6}\cdot\sin\frac{11\pi}{12}\right)=\log_4\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{2}\log_2\left(2^{-3}\right)=-\frac{3}{2}\log_2 2=-\frac{3}{2}.$$

Ответ. $-\frac{3}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения похожие на задачи 13, 14, 15, 16.

1.	Вычислите значение выражения	$\dfrac{10\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}}{\sqrt{6}}$
2.	Вычислите значение выражения	$\dfrac{6\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}}{\sqrt{6}}$
3.	Вычислите значение выражения	$\cos\frac{\pi}{3}+\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}$
4.	Вычислите значение выражения	$\left(\sin\frac{\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{12}\right)^2-1$
5.	Вычислите значение выражения	$\sqrt{3}\left(2\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{3}\right)$
6.	Вычислите значение выражения	$\sqrt{3}-\sqrt{12}\sin^2\frac{\pi}{12}$

7.	Вычислите значение выражения	$\dfrac{14}{\sin\left(-\dfrac{29\pi}{6}\right)\cos\left(\dfrac{32\pi}{3}\right)}$
8.	Вычислите значение выражения	$4\sin 30^0 \cdot \operatorname{tg} 45^0 + \cos 60^0 \cdot \operatorname{ctg} 90^0$
9.	Вычислите значение выражения	$\log_4\left(\cos\dfrac{\pi}{12}\cdot\cos\dfrac{5\pi}{3}\cdot\cos\dfrac{5\pi}{12}\right)$
10.	Вычислите значение выражения	$\log_2\cos\dfrac{5\pi}{12}+\log_2\cos\dfrac{\pi}{3}+\log_2\cos\dfrac{\pi}{12}$
11.	Вычислите значение выражения	$\sqrt[3]{\sin\dfrac{7\pi}{12}\cdot\sin\dfrac{5\pi}{6}\cdot\sin\dfrac{11\pi}{12}}$
12.	Вычислите значение выражения	$10\sin 30^0\cos 120^0$
13.	Вычислите значение выражения	$\dfrac{36\sin 23^0\cos 23^0}{\sin 46^0}$
14.	Вычислите значение выражения	$5-\dfrac{\sin 86^0}{\cos 43^0\cos 47^0}$

Задача 17. Сколько целочисленных решений имеет неравенство

$$\frac{x^2+2x-8}{\sqrt{\sin\dfrac{\pi x}{2}}}\le 0\,?$$

Решение. Найдем корни квадратного трёхчлена, стоящего в числителе дроби и разложим квадратный трёхчлен на множители:

$$x^2+2x-8=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2} \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-2\pm 6}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1=-4,\ x_2=2 \Rightarrow x^2+2x-8=(x+4)(x-2)$$

Заметим, что стоящее в знаменателе дроби выражение

$$\sqrt{\sin\frac{\pi x}{2}}$$

положительно. Поэтому исходное неравенство можно преобразовать к следующему виду:

$$\frac{x^2+2x-8}{\sqrt{\sin\frac{\pi x}{2}}}\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-8\le 0, \\ \sin\frac{\pi x}{2}>0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)(x-2)\le 0, \\ \sin\frac{\pi x}{2}>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[-4;2], \\ \sin\frac{\pi x}{2}>0. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим все целые числа, лежащие на отрезке [– 4;2]:

$$-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2.$$

При этом

$$\sin\frac{\pi\cdot(-4)}{2}=0,\ \sin\frac{\pi\cdot(-3)}{2}=1,\ \sin\frac{\pi\cdot(-2)}{2}=0,$$

$$\sin\frac{\pi\cdot(-1)}{2}=-1,\ \sin\frac{\pi\cdot(0)}{2}=0,\ \sin\frac{\pi\cdot(1)}{2}=1,\ \sin\frac{\pi\cdot(\ 2)}{2}=0.$$

Таким образом, только 2 числа из целых чисел, лежащих на отрезке [– 4;2], удовлетворяют условию

$$\sin\frac{\pi x}{2}>0.$$

Ответ. 2.

Похожие задачи для самостоятельного решения.

Сколько целочисленных решений имеет неравенство

1. $\dfrac{20+x-x^2}{\sqrt{\cos\dfrac{\pi x}{2}}} \ge 0$?

2. $\dfrac{12-x-x^2}{\sin^2\dfrac{\pi x}{2}} \ge 0$?

Задача 18. Найдите все пары чисел *x* и *y*, для которых

$$5\cos^2 x + 5y^2 + 8y\cos x + 2\cos x - 2y + 2 = 0.$$

Решение. Перепишем это уравнение в форме

$$5\cos^2 x + (8y+2)\cos x + 5y^2 - 2y + 2 = 0, \qquad (6)$$

и будем рассматривать уравнение (6) как квадратное уравнение относительно переменной cos*x*, коэффициенты которого зависят от переменной *y*. Тогда дискриминант квадратного уравнения (6) будет иметь вид:

$$D = (8y+2)^2 - 4\cdot 5\cdot\left(5y^2 - 2y + 2\right) = 64y^2 + 32y + 4 - 100y^2 + 40y - 40 =$$
$$= -36y^2 + 72y - 36 = -36\left(y^2 - 2y + 1\right) = -36(y-1)^2.$$

Заметим, что при всех значениях переменной *y*, за исключением *y* = 1, дискриминант уравнения (6) отрицателен, а лишь в случае *y* = 1 дискриминант равен нулю. Поэтому уравнение (6) будет иметь корни только лишь при *y* = 1. Подставляя значение *y* = 1 в уравнение (6), получим:

$$5\cos^2 x + 10\cos x + 5 = 0 \Leftrightarrow 5\left(\cos^2 x + 2\cos x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow 5(\cos x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Ответ. $\begin{cases} x = \pi + 2\pi n,\ n\in Z, \\ y = 1. \end{cases}$

Похожая задача для самостоятельного решения.

Найдите все пары чисел *x* и *y*, для которых

$$4x^2+2\sin^2 y+4x\sin y+4x+2=0$$

Задача 19. Какое из чисел

$$\operatorname{tg}\frac{9\pi}{19},\ \operatorname{tg}\frac{15\pi}{19},\ \operatorname{tg}\frac{21\pi}{19},\ \operatorname{tg}\frac{27\pi}{19}$$

является положительным?

Решение. Заметим, что

$$0<\frac{9\pi}{19}<\frac{\pi}{2},\quad \frac{\pi}{2}<\frac{15\pi}{19}<\pi,\quad \pi<\frac{21\pi}{19}<\frac{3\pi}{2},\quad \pi<\frac{27\pi}{19}<\frac{3\pi}{2}.$$

Поэтому

$$\operatorname{tg}\frac{9\pi}{19}>0,\ \operatorname{tg}\frac{15\pi}{19}<0,\ \operatorname{tg}\frac{21\pi}{19}>0,\ \operatorname{tg}\frac{27\pi}{19}>0.$$

Ответ. $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{19},\ \operatorname{tg}\frac{21\pi}{19},\ \operatorname{tg}\frac{27\pi}{19}$.

Похожие задачи для самостоятельного решения.

1. Какое из чисел

$$\operatorname{tg}\frac{9\pi}{17},\ \operatorname{tg}\frac{15\pi}{17},\ \operatorname{tg}\frac{21\pi}{17},\ \operatorname{tg}\frac{27\pi}{17}$$

является положительным?

2. Какое из чисел

$$\sin\frac{12\pi}{7}, \sin\frac{10\pi}{7}, \sin\frac{8\pi}{7}, \sin\frac{6\pi}{7}$$

является наибольшим?

3. Какое из чисел

$$\cos\frac{8\pi}{5}, \cos\frac{9\pi}{5}, \cos\frac{12\pi}{5}, \cos\frac{13\pi}{5}$$

является наибольшим?

4. Какое из чисел

$$\sin 0,2;\ \sin 1,6;\ \sin \pi;\ \sin 4$$

является наименьшим?

Задача 20. Найдите производную функции

$$y = 4\operatorname{tg} x - x^7$$

Решение. По формулам дифференцирования

$$y' = \frac{4}{\cos^2 x} - 7x^6$$

Ответ. $\frac{4}{\cos^2 x} - 7x^6$

Похожая задача для самостоятельного решения.

Найдите производную функции

$$y = x^6 + 5\operatorname{tg} x$$

Задача 21. Найдите значение производной функции

$$y = 3x + 4\sin x$$

при $x = -\frac{\pi}{3}$,

Решение. По формулам дифференцирования

$$y' = 3 + 4\cos x$$

Поэтому

$$y'\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 3 + 4\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 3 + 4\cdot\frac{1}{2} = 5.$$

Ответ. 5.

Похожая задача для самостоятельного решения.

Найдите значение производной функции

$$y = 6\cos x - 5x$$

при $x = -\frac{\pi}{6}$

Задача 22. Найдите все значения *x*, при которых выражения

$$\frac{\cos(\pi + 2x) - 3}{\sqrt{-\sin x}}$$

и

$$\frac{\sin\left(\frac{9\pi}{2} - x\right) - 2}{\sqrt{-\sin x}}$$

принимают разные значения.

Решение. Воспользовавшись формулами приведения и формулой «Косинус двойного угла», получим

$$\frac{\cos(\pi + 2x) - 3}{\sqrt{-\sin x}} = \frac{-\cos 2x - 3}{\sqrt{-\sin x}} = \frac{-(2\cos^2 x - 1) - 3}{\sqrt{-\sin x}} = \frac{-2\cos^2 x - 2}{\sqrt{-\sin x}};$$

$$\frac{\sin\left(\frac{9\pi}{2} - x\right) - 2}{\sqrt{-\sin x}} = \frac{\sin\left(4\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) - 2}{\sqrt{-\sin x}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2}{\sqrt{-\sin x}} = \frac{\cos x - 2}{\sqrt{-\sin x}}.$$

По условию задачи

$$\frac{-2\cos^2 x - 2}{\sqrt{-\sin x}} \ne \frac{\cos x - 2}{\sqrt{-\sin x}} \Leftrightarrow \left(\frac{-2\cos^2 x - 2}{\sqrt{-\sin x}}\right) - \left(\frac{\cos x - 2}{\sqrt{-\sin x}}\right) \ne 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2\cos^2 x - \cos x}{\sqrt{-\sin x}} \ne 0 \Leftrightarrow \frac{2\cos^2 x + \cos x}{\sqrt{-\sin x}} \ne 0 \Leftrightarrow \frac{\cos x(2\cos x + 1)}{\sqrt{-\sin x}} \ne 0,$$

Следовательно,

$$\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos x \neq -\dfrac{1}{2} \\ \sin x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \ \ x \neq -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \ \ n \in Z, \\ x \neq \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n, \ \ x \neq -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n, \ \ n \in Z, \\ \sin x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\pi + 2\pi n \, ; 2\pi n\right), \quad n \in Z, \\ x \neq -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad x \neq -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \ \ n \in Z, \end{cases}$$

Ответ. $\begin{cases} x \in \left(-\pi + 2\pi n \, ; 2\pi n\right), \quad n \in Z, \\ x \neq -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad x \neq -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z, \end{cases}$

Похожая задача для самостоятельного решения.

Найдите все значения *x*, при которых выражения

$$\frac{\cos 2x + 3}{\sqrt{-\sin x}}$$

и

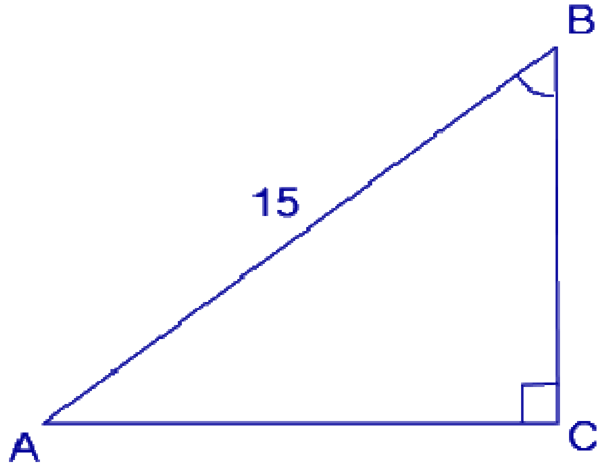
$$\frac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) + 2}{\sqrt{-\sin x}}$$

принимают разные значения.

Задача 23. В треугольнике *ABC* угол *C* равен 90^0, *AB* =15, $\cos B = \dfrac{3}{5}$.

Найдите *AC*.

Решение.



Из определения косинуса острого угла найдём *BC* (рис.1):

$$\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{15} = \frac{3}{5} \Rightarrow BC = 9.$$

С помощью теоремы Пифагора найдём *AC*:

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12.$$

Ответ. 12.

Похожие задачи для самостоятельного решения.

1. В треугольнике *ABC* угол *C* равен 90^0, *BC* =6, $\operatorname{tg} A = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Найдите AB.

2. В равнобедренном треугольнике *ABC* сторона *AC* – основание, $\cos A = \frac{5}{13}$, высота *BH* равна 24. Найдите AC.

3. В параллелограмме *ABCD* высота, опущенная на сторону *AB*, равна 6, $\cos A = \frac{2}{7}$. Найдите *AD*.

4. В параллелограмме *ABCD* высота, опущенная на сторону *AB*, равна 18, $\sin A = \frac{3}{8}$. Найдите *AD.*

Задача 24. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 5\sin x + \frac{36}{\pi}x + 6$$

на отрезке $\left[-\frac{\pi}{6};0\right]$.

Решение. Сначала найдем производную функции:

$$y' = 5\cos x + \frac{36}{\pi}.$$

Далее заметим, что

$$\cos x \ge -1, \quad \pi < 4,$$

откуда вытекает неравенство:

$$y' > -5 + \frac{36}{4} = -5 + 9 = 4.$$

Таким образом, производная функции везде положительна, а, значит, функция везде возрастает. Отсюда следует, что наименьшее значение функции на отрезке достигается в левом конце отрезка, т.е. в точке

$$x = -\frac{\pi}{6}.$$

Поэтому

$$y_{\min} = 5\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{36}{\pi}\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 6 = -\frac{5}{2} - 6 + 6 = -\frac{5}{2}.$$

Ответ. $-\frac{5}{2}$.

Задача 25. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 4\sqrt{2}\sin x - 4x + \pi$$

на отрезке $[0;\pi]$

Решение. Сначала найдем производную функции:

$$y' = 4\sqrt{2}\cos x - 4.$$

Теперь найдем корни производной, т.е. те значения *x*, в которых производная обращается в нуль:

$$4\sqrt{2}\cos x - 4 = 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{2}\cos x = 4 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

Заметим, что из этих корней только точка $x = \frac{\pi}{4}$ лежит на отрезке $[0;\pi]$, и сравним значения функции в трёх точках

$$x = 0, \quad x = \frac{\pi}{4}, \quad x = \pi.$$

Поскольку

$$y(0) = \pi,$$
$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - 4\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right) + \pi = 4 - \pi + \pi = 4,$$
$$y(\pi) = 4\sqrt{2}\sin\pi - 4\cdot\pi + \pi = -3\pi,$$

то самым большим из этих чисел является число 4, откуда вытекает, что наибольшее значение функции достигается в точке

$$x = \frac{\pi}{4},$$

и равно 4.

Ответ. 4.

Похожие задачи для самостоятельного решения.

1.	Найдите наименьшее значение функции	$y=3\sin x+\frac{30}{\pi}x+4$	на отрезке	$\left[-\frac{5\pi}{6};0\right]$
2.	Найдите наименьшее значение функции	$y=5+\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}-2x\sqrt{3}-4\cos x$	на отрезке	$\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$
3.	Найдите наименьшее значение функции	$y=2\cos x-2x-5$	на отрезке	$[-\pi;0]$
4.	Найдите наименьшее значение функции	$y=8\operatorname{tg}x-8x-2\pi+5$	на отрезке	$\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$
5.	Найдите наименьшее значение функции	$y=16\operatorname{tg}x-16x-4\pi+7$	на отрезке	$\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$
6.	Найдите наибольшее значение функции	$y=14\cos x+7x\sqrt{3}-\frac{7\pi\sqrt{3}}{3}+6$	на отрезке	$\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$
7.	Найдите наибольшее значение функции	$y=12\operatorname{tg}x-12x+3\pi-6$	на отрезке	$\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$
8.	Найдите наибольшее значение функции	$y=14\operatorname{tg}x-14x+\frac{7\pi}{2}+4$	на отрезке	$\left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$
9.	Найдите наибольшее значение функции	$y=2\cos x+x\sqrt{3}-\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$	на отрезке	$\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Задача 26. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+\sin^2 y-2}=\sin y,\\ 2\cos y=x.\end{cases}$$

Решение. Заметив, что правая часть первого уравнения системы неотрицательна, возведем первое уравнение системы в квадрат:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+\sin^2 y-2}=\sin y,\\ 2\cos y=x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+\sin^2 y-2=\sin^2 y,\\ 2\cos y=x,\\ \sin y\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-2=0,\\ 2\cos y=x,\\ \sin y\ge 0\end{cases}$$

Далее получаем

$$\begin{cases}x^2-2=0\\ 2\cos y=x\\ \sin y\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\sqrt{2}\\ 2\cos y=x\\ \sin y\ge 0\end{cases} \cup \begin{cases}x=-\sqrt{2}\\ 2\cos y=x\\ \sin y\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\sqrt{2}\\ \cos y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin y\ge 0\end{cases} \cup \begin{cases}x=-\sqrt{2}\\ \cos y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin y\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\sqrt{2}\\ y=\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z\\ \sin y\ge 0\end{cases} \cup \begin{cases}x=-\sqrt{2}\\ y=\pm\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z\\ \sin y\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\sqrt{2}\\ y=\dfrac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z\end{cases} \cup \begin{cases}x=-\sqrt{2}\\ y=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z\end{cases}$$

Ответ. $\begin{cases}x=\sqrt{2}\\ y=\dfrac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z\end{cases}$; $\begin{cases}x=-\sqrt{2}\\ y=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z\end{cases}$

Задача 27. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x^2+3x-\sqrt{x^2+3x-1}=7,\\ 2\sqrt{2}\sin y=x.\end{cases}$$

Решение. Сначала решим первое уравнение системы. Для этого перепишем его в виде

$$x^2+3x-1-\sqrt{x^2+3x-1}-6=0$$

и совершим замену переменного

$$\sqrt{x^2+3x-1}=t.$$

В результате получим квадратное уравнение

$$t^2 - t - 6 = 0,$$

обладающее корнями

$$t_1 = 3, \ t_2 = -2.$$

Поскольку *t* – неотрицательное число, то второй корень должен быть отброшен.

Следовательно,

$$t = 3 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 3x - 1} = 3 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 1 = 9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -5, x_2 = 2.$$

Рассмотрим первый случай:

$$\begin{cases} x = -5, \\ 2\sqrt{2}\sin y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5, \\ \sin y = -\dfrac{5}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

Поскольку

$$-\frac{5}{2\sqrt{2}} < -1,$$

то в первом случае решений нет.

Рассмотрим второй случай:

$$\begin{cases} x = 2, \\ 2\sqrt{2}\sin y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ \sin y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = (-1)^n \dfrac{\pi}{4} + \pi n, \ n \in Z. \end{cases}$$

Ответ. $\begin{cases} x = 2, \\ y = (-1)^n \dfrac{\pi}{4} + \pi n, \ n \in Z. \end{cases}$

Похожие задачи для самостоятельного решения.

Решить систему уравнений

1.	$\begin{cases} \sqrt{x^2+\cos^2 y-3}=\cos y, \\ 2\sin y = x. \end{cases}$
2.	$\begin{cases} \sqrt{\cos y}\sqrt{6x-x^2-8}=0, \\ \sqrt{\sin x}\sqrt{2-y-y^2}=0. \end{cases}$
3.	$\begin{cases} 2\cos 2x+3\sin x=1, \\ y^2\cos x+y\cos x+\dfrac{\sqrt{15}}{2}=0. \end{cases}$
4.	$\begin{cases} \dfrac{2\sin^2 x-3\sin x+1}{\sqrt{y}}=0, \\ y-\cos x=0. \end{cases}$
5.	$\begin{cases} \dfrac{2\sin^2 x+3\sin x+1}{\sqrt{-y}}=0, \\ y=-\cos x. \end{cases}$
6.	$\begin{cases} \dfrac{16^{\sin x}-6\cdot 4^{\sin x}+8}{\log_2(1-2y)}=0, \\ y=\cos x. \end{cases}$
7.	$\begin{cases} \dfrac{81^{\cos x}-12\cdot 9^{\cos x}+27}{\log_7(1+2y)}=0, \\ y=\sin x. \end{cases}$
8.	$\begin{cases} \dfrac{\sin 2x-\cos x}{\sqrt{y+1}}=0, \\ y=4\sin x-3. \end{cases}$
9.	$\begin{cases} \dfrac{\sin 2x+\cos x}{\sqrt{y-1}}=0, \\ y=4\sin x+3. \end{cases}$

10.	$\begin{cases} \sin x - \sin y = 1, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1. \end{cases}$
11.	$\begin{cases} \left(2x^2 - 5x - 3\right)\sqrt{\cos y} = 0, \\ \sin y = x. \end{cases}$
12.	$\begin{cases} 2\sin^2 x - 5\sin x = 0, \\ \sqrt{6y} - 2\cos x = 0. \end{cases}$
13.	$\begin{cases} 3\sin^2 x + 7\sin x = 0, \\ \sqrt{15y} - 5\cos x = 0. \end{cases}$
14.	$\begin{cases} y + \sin x = 0, \\ \left(4\sqrt{\sin x} - 1\right)\left(2y + 3\right) = 0. \end{cases}$
15.	$\begin{cases} y - \sin x = 0, \\ \left(3\sqrt{\sin x} - 1\right)\left(y - 5\right) = 0. \end{cases}$
16.	$\begin{cases} x \operatorname{tg} y = 9, \\ x \operatorname{ctg} y = 3. \end{cases}$
17.	$\begin{cases} y \operatorname{ctg} x = -9, \\ y \operatorname{tg} x = -3. \end{cases}$
18.	$\begin{cases} y^2 = x, \\ \sin y^2 = \cos x. \end{cases}$
19.	$\begin{cases} \left(\dfrac{36}{25}\right)^{\operatorname{tg} x} + \left(\dfrac{6}{5}\right)^{\operatorname{tg} x} - 2 = 0, \\ \sqrt{15y} - 5\cos x = 0. \end{cases}$