

**Доктор физико-математических наук, профессор**

**К. Л. САМАРОВ**

## **РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

**Учебно-методическое пособие для школьников по математике**

**© К. Л. Самаров, 2010**

**Пример 1.** Решить уравнение

$$\sin^2 x = \frac{1}{4}$$

**Решение.**

$$\sin^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z \\ x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$$

**Ответ.**  $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$

**Пример 2.** Решить уравнение

$$\cos x - 4 \cos \frac{x}{2} + 1 = 0$$

**Решение.** С помощью формулы «Косинус двойного угла» получаем:

$$\begin{aligned} \cos x - 4 \cos \frac{x}{2} + 1 = 0 &\Leftrightarrow 2 \cos^2 \left( \frac{x}{2} \right) - 1 - 4 \cos \frac{x}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 \cos^2 \left( \frac{x}{2} \right) - 4 \cos \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos^2 \left( \frac{x}{2} \right) - 2 \cos \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left( \cos \frac{x}{2} \right) \cdot \left( \cos \frac{x}{2} - 2 \right) = 0 \end{aligned}$$

Возникают два случая:

$$1. \cos \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi k, k \in Z$$

$$2. \cos \frac{x}{2} = 2. \text{ В этом случае уравнение решений не имеет.}$$

**Ответ.**  $\pi + 2\pi k, k \in Z$

**Пример 3.** Решить уравнение

$$3 \sin^2 x - \sin x = 2 \cos x - 3 \sin 2x$$

**Решение.** Воспользовавшись формулой «Синус двойного угла» и разложением на множители, получаем:

$$\begin{aligned} 3\sin^2 x - \sin x &= 2\cos x - 3\sin 2x \Leftrightarrow \sin x(3\sin x - 1) = 2\cos x - 6\sin x \cos x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin x(3\sin x - 1) &= 2\cos x(1 - 3\sin x) \Leftrightarrow \sin x(3\sin x - 1) - 2\cos x(1 - 3\sin x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\sin x + 2\cos x)(3\sin x - 1) = 0 \end{aligned}$$

Возникают два случая:

1.  $\sin x + 2\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x = -2\cos x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -2 \Leftrightarrow x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi k, k \in Z$

2.  $3\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow 3\sin x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + \pi k, k \in Z$

**Ответ.**  $-\operatorname{arctg} 2 + \pi k, k \in Z; (-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + \pi k, k \in Z$

**Пример 4.** Решить уравнение

$$\sin 2x = 2\sqrt{3} \cos^2 x$$

**Решение.** Воспользовавшись формулой «Синус двойного угла» и разложением на множители, получаем

$$\sin 2x = 2\sqrt{3} \cos^2 x \Leftrightarrow 2\sin x \cos x - 2\sqrt{3} \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x(\sin x - \sqrt{3} \cos x) = 0$$

Возникают два случая:

1.  $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \sqrt{3} \cos x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$

2.  $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

**Ответ.**  $\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z; \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

**Пример 5.** Решить уравнение

$$\frac{\cos x}{1 - \sin x} = 1 + \sin x$$

**Решение.** Воспользовавшись формулой «Основное тригонометрическое тождество», получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\cos x}{1 - \sin x} = 1 + \sin x &\Leftrightarrow \frac{\cos x}{1 - \sin x} - (1 + \sin x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos x - (1 + \sin x)(1 - \sin x)}{1 - \sin x} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\cos x - (1 - \sin^2 x)}{1 - \sin x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos x - \cos^2 x}{1 - \sin x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos x(1 - \cos x)}{1 - \sin x} = 0 \end{aligned}$$

Возникают два случая:

- $\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
- $1 - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

**Ответ.**  $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

**Пример 6.** Решить уравнение

$$\frac{\sin 2x}{1 + \sin x} = -2\cos x$$

**Решение.** Основой решения задачи является разложение на множители:

$$\begin{aligned} \frac{\sin 2x}{1 + \sin x} = -2\cos x &\Leftrightarrow \frac{2\sin x \cos x}{1 + \sin x} + 2\cos x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{2\sin x \cos x + 2\cos x(1 + \sin x)}{1 + \sin x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2\cos x(\sin x + 1 + \sin x)}{1 + \sin x} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{2\cos x(2\sin x + 1)}{1 + \sin x} = 0 \end{aligned}$$

Возникают два случая:

- $\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
- $\begin{cases} 2\sin x + 1 = 0 \\ \sin x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2} \\ \sin x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

**Ответ.**  $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

**Пример 7.** Решить уравнение

$$\frac{2 \cos x}{\sin 3x + \sin x} = \frac{11}{6} - \frac{1}{2} \sin 2x$$

**Решение.** Решение задачи основывается на применении формулы «Сумма синусов», с помощью которой исходное уравнение сводится к квадратному уравнению относительно функции  $\sin 2x$ .

$$\begin{aligned} \frac{2 \cos x}{\sin 3x + \sin x} = \frac{11}{6} - \frac{1}{2} \sin 2x &\Leftrightarrow \frac{2 \cos x}{2 \sin 2x \cos x} = \frac{11}{6} - \frac{1}{2} \sin 2x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sin 2x} = \frac{11}{6} - \frac{1}{2} \sin 2x \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 = \frac{11}{6} \sin 2x - \frac{1}{2} \sin^2 2x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3 \sin^2 2x - 11 \sin 2x + 6 = 0 \Leftrightarrow (\sin 2x)_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 72}}{6} = \\ &= \frac{11 \pm 7}{6} \Leftrightarrow (\sin 2x)_1 = \frac{2}{3}, (\sin 2x)_2 = 3 \end{aligned}$$

Возникают два случая:

1.

$$\begin{aligned} \sin 2x = \frac{2}{3} &\Leftrightarrow 2x = (-1)^k \arcsin \frac{2}{3} + \pi k, k \in Z \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \cdot (-1)^k \cdot \arcsin \frac{2}{3} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z \end{aligned}$$

2.

$\sin 2x = 3$ . В этом случае уравнение решений не имеет.

**Ответ.**  $\frac{1}{2} \cdot (-1)^k \cdot \arcsin \frac{2}{3} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$

**Пример 8.** Решить уравнение

$$\sin 2x = \frac{3}{7} (\sin 3x - \sin x)$$

**Решение.** Решение задачи основывается на использовании формул «Синус двойного угла» и «Разность синусов»:

$$\begin{aligned}\sin 2x &= \frac{3}{7}(\sin 3x - \sin x) \Leftrightarrow \sin 2x - \frac{3}{7}(\sin 3x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sin 2x - \frac{6}{7}\sin 2x \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x \left(1 - \frac{6}{7}\cos x\right) = 0\end{aligned}$$

Возникают два случая:

1.  $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$
2.  $1 - \frac{6}{7}\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{7}{6}$ . В этом случае уравнение решений не имеет.

**Ответ.**  $\frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

**Пример 9.** Решить уравнение

$$\sin 3x \cos x - \sin x \cos 3x = \sin 7x + \sin 5x$$

**Решение.** Решение задачи использует три формулы: «Синус разности»,

«Сумма синусов», «Разность синусов»:

$$\begin{aligned}\sin 3x \cos x - \sin x \cos 3x &= \sin 7x + \sin 5x \Leftrightarrow \sin 2x = 2\sin 6x \cos x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\sin x \cos x - 2\sin 6x \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(\sin x - \sin 6x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -2\cos x \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{7x}{2} = 0\end{aligned}$$

Возникают три случая:

1.  $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
2.  $\sin \frac{5x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{5x}{2} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}\pi k, k \in \mathbb{Z}$
3.  $\cos \frac{7x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{7x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{7} + \frac{2}{7}\pi k, k \in \mathbb{Z}$

**Ответ.**  $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \frac{2}{5}\pi k, k \in \mathbb{Z}, \frac{\pi}{7} + \frac{2}{7}\pi k, k \in \mathbb{Z}$

**Пример 10.** Решить уравнение

$$\cos 4x + \cos 2x = \cos 12x + \cos 10x$$

**Решение.** Воспользовавшись формулами «Сумма косинусов» и «Разность косинусов», получаем:

$$\begin{aligned}\cos 4x + \cos 2x = \cos 12x + \cos 10x &\Leftrightarrow 2 \cos 3x \cos x = 2 \cos 11x \cos x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos 3x \cos x - \cos 11x \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x (\cos 3x - \cos 11x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 \cos x \sin 7x \sin 4x = 0\end{aligned}$$

Возникают три случая:

1.  $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

2.  $\sin 7x = 0 \Leftrightarrow 7x = \pi k, k \in Z \Leftrightarrow x = \frac{1}{7} \pi k, k \in Z$

3.  $\sin 4x = 0 \Leftrightarrow 4x = \pi k, k \in Z \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \pi k, k \in Z$

**Ответ.**  $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, \frac{1}{7} \pi k, k \in Z, \frac{1}{4} \pi k, k \in Z$

**Пример 11.** Решить уравнение

$$\sin x = \sin 5x$$

**Решение.** Воспользуемся формулой «Разность синусов»:

$$\sin x = \sin 5x \Leftrightarrow \sin 5x - \sin x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin 2x \cos 3x = 0$$

Возникают два случая:

1.

$$\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \pi k, k \in Z \Leftrightarrow x = \frac{\pi k}{2}, k \in Z$$

2.

$$\cos 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3} \pi k, k \in Z$$

**Ответ.**  $\frac{\pi k}{2}, k \in Z; \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3} \pi k, k \in Z$

**Пример 12.** Решить уравнение

$$\operatorname{tg}3x = \operatorname{tg}x$$

**Решение.** Решение задачи основано на использовании свойств функции

$y = \operatorname{tg}x$ :

$$\operatorname{tg}3x = \operatorname{tg}x \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = x + \pi k, k \in Z \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \\ 3x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}\pi k, k \in Z \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \\ x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}\pi m, m \in Z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}\pi k, k \in Z \\ \frac{1}{2}\pi k \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \\ \frac{1}{2}\pi k \neq \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}\pi m, m \in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}\pi k, k \in Z \\ k \neq 1 + 2n, n \in Z \\ 3k \neq 1 + 2m, m \in Z \end{cases} \Leftrightarrow x = \pi s, s \in Z$$

**Ответ.**  $\pi s, s \in Z$

**Пример 13.** Решить уравнение

$$1 - 6\cos 2x = \sqrt{1 - 2\sin^2 x}$$

**Решение.** Решение задачи основывается на применении формулы «Косинус двойного угла», с помощью которой исходное уравнение сводится к квадратному уравнению относительно функции  $\sqrt{\cos 2x}$ :

$$\begin{aligned} 1 - 6\cos 2x = \sqrt{1 - 2\sin^2 x} &\Leftrightarrow 1 - 6\cos 2x = \sqrt{\cos 2x} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 6\cos 2x + \sqrt{\cos 2x} - 1 = 0 &\Leftrightarrow 6(\sqrt{\cos 2x})^2 + \sqrt{\cos 2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\sqrt{\cos 2x})_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{12} = \frac{-1 \pm 5}{12} \end{aligned}$$

Возникают два случая:

1.



$$\begin{aligned}\sqrt{\cos 2x} = \frac{1}{3} &\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{9} \Leftrightarrow 2x = 2\pi k \pm \arccos \frac{1}{9}, k \in Z \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \pi k \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{9}, k \in Z\end{aligned}$$

2.

$\sqrt{\cos 2x} = -\frac{1}{2}$ . В этом случае уравнение решений не имеет.

**Ответ.**  $\pi k \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{9}, k \in Z$

**Пример 14.** Решить уравнение

$$\sqrt{\cos 2x} = \frac{1}{3} - \sin x \quad (1)$$

**Решение.** Воспользовавшись формулой «Косинус двойного угла», перепишем уравнение (1) в виде:

$$\sqrt{1 - 2\sin^2 x} = \frac{1}{3} - \sin x. \quad (2)$$

Если теперь совершить в уравнении (2) замену переменного по формуле:

$$y = \sin x, \quad -1 \leq y \leq 1, \quad (3)$$

то получается иррациональное уравнение

$$\sqrt{1 - 2y^2} = \frac{1}{3} - y. \quad (4)$$

Поскольку левая часть уравнения (4) неотрицательна, то и правая часть должна быть неотрицательной, следовательно, переменная  $y$  также должна удовлетворять неравенству:

$$\frac{1}{3} - y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq \frac{1}{3}.$$

Таким образом, переменная  $y$  должна быть заключена в пределах:

$$-1 \leq y \leq \frac{1}{3}. \quad (5)$$

Далее получаем:

$$\begin{aligned}\sqrt{1-2y^2} &= \frac{1}{3} - y \Rightarrow 1-2y^2 = \frac{1}{9} - \frac{2}{3}y + y^2 \Rightarrow 3y^2 - \frac{2}{3}y - \frac{8}{9} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 27y^2 - 6y - 8 &= 0 \Rightarrow y_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36+864}}{54} = \frac{6 \pm 30}{54} \Rightarrow \\ \Rightarrow y_1 &= \frac{36}{54} = \frac{2}{3}, \quad y_2 = -\frac{24}{54} = -\frac{4}{9}.\end{aligned}$$

В силу (5) первый случай должен быть отброшен. Во втором случае получаем:

$$\sin x = -\frac{4}{9} \Leftrightarrow x = (-1)^{k+1} \arcsin \frac{4}{9} + \pi k, k \in Z$$

**Ответ.**  $(-1)^{k+1} \arcsin \frac{4}{9} + \pi k, k \in Z$

**Пример 15.** Решить уравнение

$$\sqrt{\cos 2x + 2} = 1 + 4 \cos x \quad (6)$$

**Решение.** Воспользовавшись формулой «Косинус двойного угла», перепишем уравнение (6) в виде:

$$\sqrt{2 \cos^2 x + 1} = 1 + 4 \cos x \quad (7)$$

Если теперь совершить в уравнении (7) замену переменной по формуле:

$$y = \cos x, \quad -1 \leq y \leq 1, \quad (8)$$

то получается иррациональное уравнение

$$\sqrt{2y^2 + 1} = 1 + 4y. \quad (9)$$

Поскольку левая часть уравнения (9) неотрицательна, то и правая часть должна быть неотрицательной, следовательно, переменная  $y$  также должна удовлетворять неравенству:

$$1 + 4y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -\frac{1}{4}.$$

Таким образом, переменная  $y$  должна быть заключена в пределах:

$$-\frac{1}{4} \leq y \leq 1. \quad (10)$$

Далее получаем:

$$\begin{aligned}\sqrt{2y^2 + 1} = 1 + 4y &\Rightarrow 2y^2 + 1 = 1 + 8y + 16y^2 \Rightarrow 14y^2 + 8y = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 7y^2 + 4y = 0 \Rightarrow y(7y + 4) = 0 \Rightarrow y_1 = -\frac{4}{7}, y_2 = 0.\end{aligned}$$

В силу (10) первый случай должен быть отброшен. Во втором случае получаем:

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$$

**Ответ.**  $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

**Пример 16.** Решить уравнение

$$\sqrt{6 + 3\operatorname{tg}x} = \operatorname{tg}x \sqrt{1 + 4\operatorname{ctg}x}$$

**Решение.** В результате замены переменной

$$y = \operatorname{tg}x, y > 0 \tag{11}$$

уравнение преобразуется к виду

$$\sqrt{6 + 3y} = y \sqrt{1 + \frac{4}{y}}$$

Далее получаем:

$$\begin{aligned}\sqrt{6 + 3y} = y \sqrt{1 + \frac{4}{y}} &\Rightarrow 6 + 3y = y^2 \left(1 + \frac{4}{y}\right) \Rightarrow 6 + 3y = y^2 + 4y \Rightarrow \\ &\Rightarrow y^2 + y - 6 = 0 \Rightarrow (y + 3)(y - 2) = 0 \Rightarrow y_1 = -3, y_2 = 2.\end{aligned}$$

В силу (11) первый случай должен быть отброшен. Во втором случае получаем:

$$\operatorname{tg}x = 2 \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k, k \in Z$$

**Ответ.**  $\operatorname{arctg} 2 + \pi k, k \in Z$

**Пример 17.** Решить уравнение

$$15\operatorname{ctg}x = 4\sin x$$

**Решение.** Решение задачи основано на использовании свойств функции  $\operatorname{ctg}x$  и применении «Основного тригонометрического тождества»:

$$\begin{aligned}
 15\operatorname{ctg}x = 4\sin x &\Rightarrow \frac{15\cos x}{\sin x} - 4\sin x = 0 \Rightarrow \frac{15\cos x - 4\sin^2 x}{\sin x} = 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \frac{15\cos x - 4(1 - \cos^2 x)}{\sin x} = 0 \Rightarrow \frac{4\cos^2 x + 15\cos x - 4}{\sin x} = 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{cases} 4\cos^2 x + 15\cos x - 4 = 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\cos x)_{1,2} = \frac{-15 \pm \sqrt{225 + 64}}{4} \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{cases} (\cos x)_{1,2} = \frac{-15 \pm 17}{4} \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow (\cos x)_1 = -8, (\cos x)_2 = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

В первом случае уравнение решений не имеет. Во втором случае получаем:

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2\pi k \pm \frac{\pi}{3}, k \in Z$$

**Ответ.**  $2\pi k \pm \frac{\pi}{3}, k \in Z$

**Пример 18.** Решить уравнение

$$\frac{1}{2}\operatorname{ctg}x + \frac{5}{3\cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$$

**Решение.** Решение задачи основано на использовании свойств функции  $\operatorname{ctg}x$  и применении «Основного тригонометрического тождества».

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x + \frac{5}{3 \cos x} &= \frac{2}{\sin 2x} \Rightarrow \frac{1 \cos x}{2 \sin x} + \frac{5}{3 \cos x} = \frac{2}{2 \sin x \cos x} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{3 \cos^2 x + 10 \sin x - 6}{6 \sin x \cos x} &= 0 \Rightarrow \frac{3(1 - \sin^2 x) + 10 \sin x - 6}{\sin x \cos x} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{3 - 3 \sin^2 x + 10 \sin x - 6}{\sin x \cos x} &= 0 \Rightarrow \frac{3 \sin^2 x - 10 \sin x + 3}{\sin x \cos x} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\sin x)_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6} \\ \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{array} \right. &\Rightarrow (\sin x)_1 = 3, (\sin x)_2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

В первом случае уравнение решений не имеет. Во втором случае получаем:

$$\sin x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

**Ответ.**  $(-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

**Пример 19.** Решить уравнение

$$-\frac{7}{6} \operatorname{tg} 2x = \cos x$$

**Решение.** Решение задачи использует формулы «Синус двойного угла» и «Косинус двойного угла».

$$\begin{aligned} -\frac{7}{6} \operatorname{tg} 2x = \cos x &\Leftrightarrow -\frac{7 \sin 2x}{6 \cos 2x} - \cos x = 0 \Leftrightarrow \frac{7 \sin 2x + 6 \cos x \cos 2x}{\cos 2x} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{14 \sin x \cos x + 6 \cos x \cos 2x}{\cos 2x} &= 0 \Leftrightarrow \frac{\cos x (7 \sin x + 3 \cos 2x)}{\cos 2x} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\cos x (7 \sin x + 3 - 6 \sin^2 x)}{\cos 2x} &= 0 \Leftrightarrow \frac{\cos x (6 \sin^2 x - 7 \sin x - 3)}{\cos 2x} = 0 \end{aligned}$$

Возникают два случая:

1.

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2\cos^2 x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

2.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 6\sin^2 x - 7\sin x - 3 = 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 6\sin^2 x - 7\sin x - 3 = 0 \\ 1 - 2\sin^2 x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sin x)_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 72}}{12} \\ 2\sin^2 x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (\sin x)_{1,2} = \frac{7 \pm 11}{12} \\ 2\sin^2 x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sin x)_1 = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \\ 2\sin^2 x \neq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} (\sin x)_2 = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3} \\ 2\sin^2 x \neq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

В первом случае уравнение решений не имеет. Во втором случае получаем:

$$\begin{cases} \sin x = -\frac{1}{3} \\ 2\sin^2 x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = (-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

**Ответ.**  $(-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

**Пример 20.** Решить уравнение

$$(1 + \cos x) \operatorname{ctg} x = 2 \sin 2x$$

**Решение.**

$$\begin{aligned} (1 + \cos x) \operatorname{ctg} x = 2 \sin 2x &\Leftrightarrow \frac{(1 + \cos x) \cos x}{\sin x} - 4 \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\cos x + \cos^2 x - 4 \sin^2 x \cos x}{\sin x} = 0 &\Leftrightarrow \frac{\cos x + \cos^2 x - 4(1 - \cos^2 x) \cos x}{\sin x} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{4 \cos^3 x + \cos^2 x - 3 \cos x}{\sin x} = 0 &\Leftrightarrow \frac{\cos x (4 \cos^2 x + \cos x - 3)}{\sin x} = 0 \end{aligned}$$

Возникают два случая:

$$1. \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2. \begin{cases} 4\cos^2 x + \cos x - 3 = 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\cos x)_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{8} \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\cos x)_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{8} \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\cos x)_1 = -1 \cup (\cos x)_2 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$$

Система

$$\begin{cases} \cos x = -1 \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$$

решений не имеет.

Решением системы

$$\begin{cases} \cos x = \frac{3}{4} \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$$

являются числа:

$$x = 2\pi k \pm \arccos \frac{3}{4}, k \in Z$$

**Ответ.**  $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z; 2\pi k \pm \arccos \frac{3}{4}, k \in Z$

**Пример 21.** Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\cos x}$$

**Решение.**

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x &= \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin^2 x - \cos^2 x - \sin x}{\sin x \cos x} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\sin^2 x - (1 - \sin^2 x) - \sin x}{\sin x \cos x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2\sin^2 x - \sin x - 1}{\sin x \cos x} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sin x)_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \\ \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sin x)_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4} \\ \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (\sin x)_1 = 1 \\ \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} (\sin x)_2 = -\frac{1}{2} \\ \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

В первом случае система решений не имеет. Во втором случае получаем:

$$\begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2} \\ \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$$

**Ответ.**  $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$

Следующие два примера решаются с помощью формул приведения.

**Пример 22.** Решить уравнение

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(4x + 3\pi)$$

**Решение.**

$$\begin{aligned} \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) &= \sin(4x + 3\pi) \Leftrightarrow \sin 2x = -\sin 4x \Leftrightarrow \sin 2x + \sin 4x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\sin 3x \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = 0 \cup \cos x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}\pi k, k \in Z, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \end{aligned}$$



Ответ.  $\frac{1}{3}\pi k, k \in Z; \quad \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

**Пример 23.** Решить уравнение

$$\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = 4\cos\left(\frac{7\pi}{4} - x\right)$$

**Решение.** Поскольку

$$\begin{aligned} \cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) &= -\sin x, \\ \cos\left(\frac{7\pi}{4} - x\right) &= \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4} - x\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \\ &= \cos\frac{\pi}{4}\cos x - \sin\frac{\pi}{4}\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x - \sin x), \end{aligned}$$

то исходное уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} &= \frac{4}{\sqrt{2}}(\cos x - \sin x) \Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} - 2\sqrt{2}(\cos x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\sin x - \cos x}{\cos x \sin x} + 2\sqrt{2}(\sin x - \cos x) &= 0 \Leftrightarrow (\sin x - \cos x)\left(\frac{1}{\cos x \sin x} + 2\sqrt{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\sin x - \cos x)\left(\frac{1 + 2\sqrt{2}\cos x \sin x}{\cos x \sin x}\right) &= 0 \end{aligned}$$

В результате возникают два случая.

1.

$$\begin{cases} \sin x - \cos x = 0 \\ \sin x \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \cos x \\ \sin x \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin x}{\cos x} = 1 \\ \sin x \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{1 + 2\sqrt{2}\cos x \sin x}{\cos x \sin x} = 0 &\Leftrightarrow \frac{1 + \sqrt{2}\sin 2x}{\sin 2x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{1}{\sqrt{2}} &\Leftrightarrow 2x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z \Leftrightarrow x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\pi k, k \in Z \end{aligned}$$

**Ответ.**  $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; (-1)^{k+1} \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

**Пример 24.** Решить уравнение

$$|\cos x| = \cos x - \frac{15}{2} \operatorname{tg} x$$

**Решение.** Рассмотрим, сначала, случай  $\cos x > 0$ . Тогда  $|\cos x| = \cos x$  и уравнение принимает вид

$$\begin{cases} -\frac{15}{2} \operatorname{tg} x = 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \cos x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Теперь рассмотрим случай  $\cos x < 0$ . Тогда  $|\cos x| = -\cos x$  и исходное уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} \begin{cases} -\cos x = \cos x - \frac{15}{2} \operatorname{tg} x \\ \cos x < 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos x - \frac{15 \sin x}{2 \cos x} = 0 \\ \cos x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\cos^2 x - 15\sin x = 0 \\ \cos x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4(1 - \sin^2 x) - 15\sin x = 0 \\ \cos x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 4\sin^2 x - 15\sin x = 0 \\ \cos x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4\sin^2 x + 15\sin x - 4 = 0 \\ \cos x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sin x)_{1,2} = \frac{-15 \pm \sqrt{225 + 64}}{8} \\ \cos x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (\sin x)_{1,2} = \frac{-15 \pm 17}{8} \\ \cos x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sin x)_1 = -4 \cup (\sin x)_2 = \frac{1}{4} \\ \cos x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Первая система решений не имеет. Во втором случае получаем

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{4} \\ \cos x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\arcsin \frac{1}{4} + 2\pi k + \pi, k \in \mathbb{Z}$$

**Ответ.**  $-\arcsin \frac{1}{4} + 2\pi k + \pi, k \in \mathbb{Z}$

**Пример 25.** Решить уравнение

$$|\operatorname{tg}x| = \operatorname{tg}x + \frac{4}{3}\cos x$$

**Решение.** Рассмотрим, сначала, случай  $\operatorname{tg}x \geq 0$ . Тогда  $|\operatorname{tg}x| = \operatorname{tg}x$  и уравнение принимает вид

$$\cos x = 0,$$

что невозможно, т.к. при этом не существует  $\operatorname{tg}x$

Теперь рассмотрим случай  $\operatorname{tg}x < 0$ . Тогда  $|\operatorname{tg}x| = -\operatorname{tg}x$  и исходное уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} \begin{cases} -\operatorname{tg}x = \operatorname{tg}x + \frac{4}{3}\cos x \\ \operatorname{tg}x < 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\operatorname{tg}x + \frac{4}{3}\cos x = 0 \\ \operatorname{tg}x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{2}{3}\cos x = 0 \\ \operatorname{tg}x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3\sin x + 2\cos x}{\cos x} = 0 \\ \operatorname{tg}x < 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3\sin x + 2\cos x = 0 \\ \operatorname{tg}x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sin x = -2\cos x \\ \operatorname{tg}x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}x = -\frac{2}{3} \\ \operatorname{tg}x < 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \operatorname{tg}x = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow x = -\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

**Ответ.**  $-\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

### ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить уравнения:

1.  $\sqrt{2\cos^2 x - 1} = 1 - 12\cos 2x$

2.  $\frac{2\sin x}{\cos x - \cos 3x} - \frac{7}{3} = 2\sin 2x$

3.  $\sqrt{3\sin^2 x - 2} = 2\cos x - \frac{1}{2}$

4.  $\sqrt{\operatorname{ctg}x + 12} = \operatorname{ctg}x \sqrt{1 + 2\operatorname{tg}x}$

5.  $10\operatorname{ctg}^2 x = \frac{9}{\sin x} - 1$

6.  $8\operatorname{tg} x = 3\cos x$

7.  $\frac{3}{2\cos x} = \operatorname{tg}^2 x$

8.  $\frac{4}{\cos x} = 4\operatorname{tg} x + 3\cos x$

9.  $\operatorname{tg} x + \frac{13}{6\sin x} = \frac{4}{\sin 2x}$

10.  $5\sin x = \frac{6}{\sin x} - 6\operatorname{ctg} x$

11.  $7\operatorname{tg} 2x = 4\sin x$

12.  $(1 + \sin x)\operatorname{tg} x = 3\sin 2x$

13.  $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sin x}$

14.  $\sin 2x = \frac{2}{7}(\cos 3x - \cos x)$

15.  $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3}$

16.  $\cos^2 x = \frac{1}{2}$

17.  $\operatorname{ctg}^2 x = 3$

18.  $5\sin x + 2\sin 2x = 0$

19.  $4\sin \frac{x}{2} + \cos x - 1 = 0$

20.  $3\cos x + \sin 2x = 0$

21.  $2\cos^2 x - \cos x = \sin x - \sin 2x$

22.  $6\cos 2x \cdot \cos x = 1 - 2\sin^2 x$

23.  $\sin 2x - 4\sin^2 x = 2\sin x - \cos x$

24.  $5\cos 2x \cdot \sin x = 2\cos^2 x - 1$

25.  $\cos x - \sin x = 4\cos^2 x - 2\sin 2x$
26.  $4\sin 2x + 4\sin x = 2\cos x + 1$
27.  $3\sin 2x + \cos x = 6\sin x + 1$
28.  $\sin\left(3x - \frac{5\pi}{2}\right) = \sin(6x - 3\pi)$
29.  $\sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$
30.  $\sqrt{3}\cos 4\left(3x + \frac{7\pi}{2}\right) = \sin(8x - 5\pi)$
31.  $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = 4\sin\left(x + \frac{5\pi}{4}\right)$
32.  $\sin(2x - 7\pi) = \sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
33.  $\cos\left(2x + \frac{5\pi}{2}\right) = \cos x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$
34.  $|\sin x| = \sin x - \frac{16}{3}\operatorname{ctgx}$
35.  $|\operatorname{ctgx}| = \operatorname{ctgx} - \frac{4}{3}\sin x$
36.  $\sin 2x \cos 8x + \cos 2x \sin 8x = \sin 7x - \sin 3x$
37.  $\cos 5x - \cos x = \cos 12x - \cos 8x$
38.  $\sin 2x = \sqrt{3}\sin x$
39.  $\sin 2x = \sqrt{2}\cos x$
40.  $\sin 2x = 2 - 2\cos^2 x$
41.  $\operatorname{ctg} 3x = \operatorname{ctg} 5x$
42.  $\cos 2x = \cos 6x$
43.  $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = 1 - \cos x$

$$44. \frac{\sin 2x}{1 - \cos x} = 2 \sin x$$

$$45. \sqrt{4 \cos^2 x - 3} = 4 \sin x - 1$$

$$46. \sqrt{\cos 2x} = 1 + 2 \sin x$$

$$47. \sqrt{3 \sin^2 x - 2} = 3 \cos x - 1$$