



**ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ГОРОДА МОСКВЫ  
«ШКОЛА «СВИБЛОВО»**

**Проектная работа  
на тему:**

**«Движения плоскости вместо вычислений»**

**Автор проекта:  
ученик 8 «В» класса  
школы «СВИБЛОВО»  
Самаров Сергей Евгеньевич**

**Руководитель проекта:  
преподаватель математики  
школы «СВИБЛОВО»  
Шиленкова Елена Валентиновна**

**г. Москва, 2017 г.**

## Оглавление

1. Постановка проблемы	стр. 3
2. Определение критериев результативности	стр. 3
3. Создание концепции проекта	стр. 3
4. Определение доступных ресурсов	стр. 5
5. План выполнения проекта	стр. 6
6. Реализация плана, корректировка	стр. 6
7. Список задач для проведения интерактивных уроков по геометрии на тему: «Движения плоскости вместо вычислений»	стр. 6
7.1. Задача, решаемая с помощью сдвига	стр. 6
7.2. Задачи, решаемые с помощью центральной симметрии	стр. 6
7.3. Задачи, решаемые с помощью поворота	стр. 7
7.4. Задачи, решаемые с помощью осевой симметрии	стр. 8
7.5. Задача, составленная автором проекта и решаемая без вычислений с помощью поворота	стр. 9
7.6. Задача, составленная автором проекта и решаемая без вычислений с помощью осевой симметрии	стр. 9
8. Оценка эффективности и результативности	стр. 10
9. Литература	стр. 10
10. Список Приложений	стр. 10
10.1. Приложение 1. Полные решения задач для проведения интерактивных уроков по геометрии на тему: «Движения плоскости вместо вычислений»	стр. 1 -19
10.2. Приложение 2. Демонстрационные материалы к решениям задач для проведения интерактивных уроков по геометрии на тему: «Движения плоскости вместо вычислений»	Документ в формате Power Point

**1. Постановка проблемы.** Понятие движения является очень важным и лежит в основаниях геометрии. На начальном этапе изучения геометрии две фигуры называют равными, если их можно наложить друг на друга. При более углубленном изучении это определение конкретизируется, и две фигуры называют равными, если существует движение, переводящее одну фигуру в другую. Движения хорошо изучены, и им посвящено много научных и научно-популярных исследований. Однако автор проекта заметил, что одно из свойств движений заслуживает дополнительного изучения. Это свойство заключается в том, что с помощью движений удастся решать ряд геометрических задач, которые без использования движений решаются намного сложнее и утомительнее. Именно это свойство движений и побудило автора разработать данный проект.

**2. Определение критериев результативности.** Автор планирует оценивать успешность своего проекта по следующим главным параметрам реализованного проектного замысла:

- актуальность и важность темы проекта;
- соответствие темы проекта содержанию проекта;
- наглядность изложения материала и доступность формы его представления;
- интерес, который проект должен вызывать у слушателей и участников интерактивных уроков.

**3. Создание концепции проекта.** Проводя сравнительный анализ различных способов решения классических геометрических задач, таких, например, как задача Герона Александрийского, задача Наполеона, задача Фаньяно, задача, связанная с точками Ферма и Торричелли, и других задач, автор проекта заметил, что решения этих задач, опирающиеся на свойства движений, являются наиболее эффективными и наглядными.

При движениях плоскости сохраняются расстояния между точками. Это означает, что если произвольно выбранная точка  $A$  переходит при движении в точку  $A_1$ , а произвольно выбранная точка  $B$  переходит в точку  $B_1$ , то расстояние  $AB$  равно расстоянию  $A_1B_1$  (рис.1,2).

Сдвиги (параллельные переносы), симметрии относительно точек (центральные симметрии), повороты и симметрии относительно прямых (осевые симметрии) являются движениями плоскости.

При сдвиге каждая точка плоскости перемещается. При центральной симметрии все точки плоскости за исключением центра симметрии перемещаются, центр симметрии остается на месте.

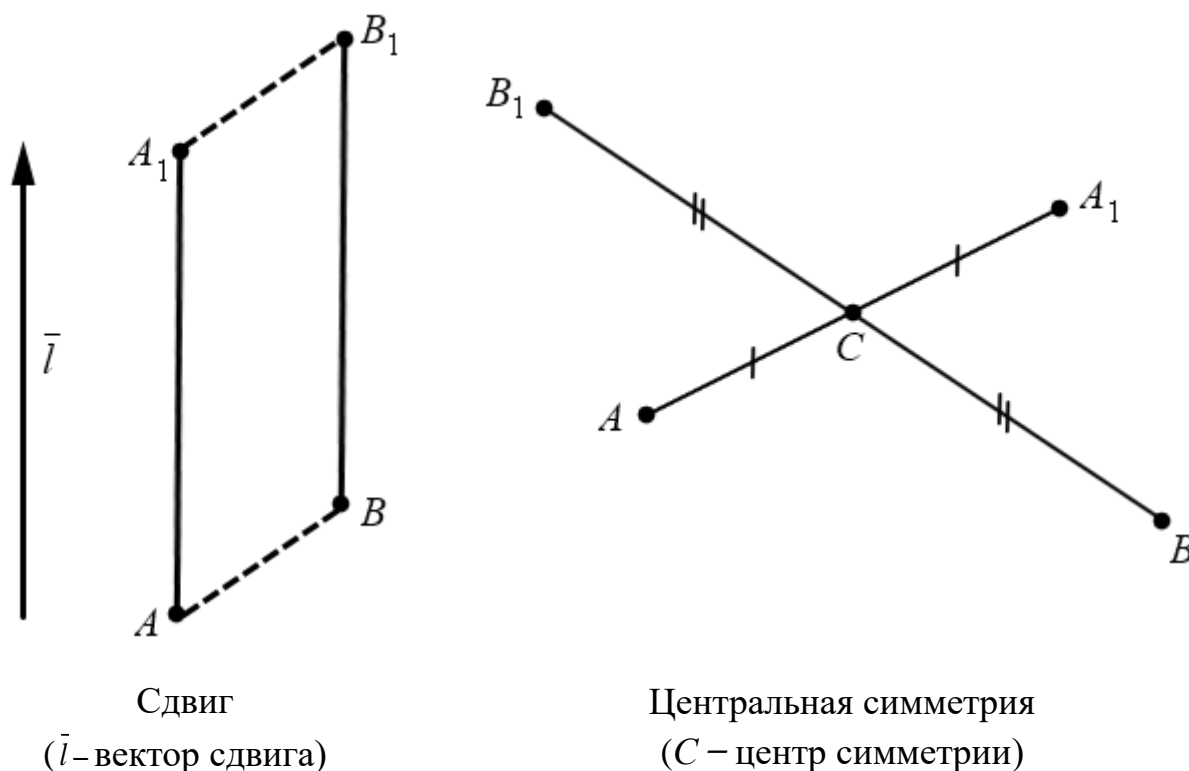
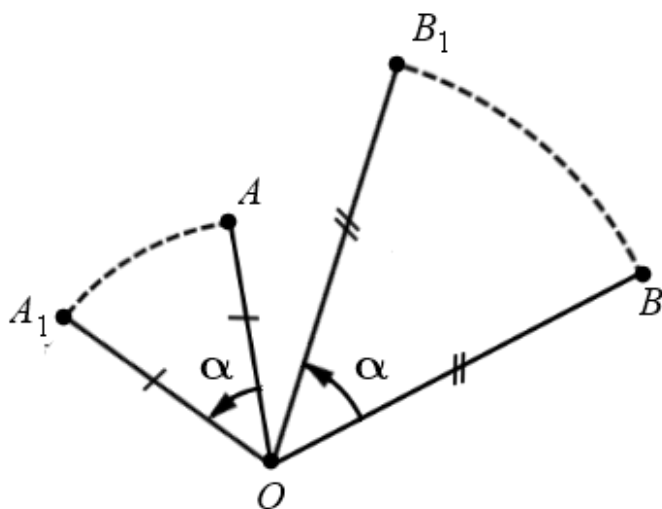


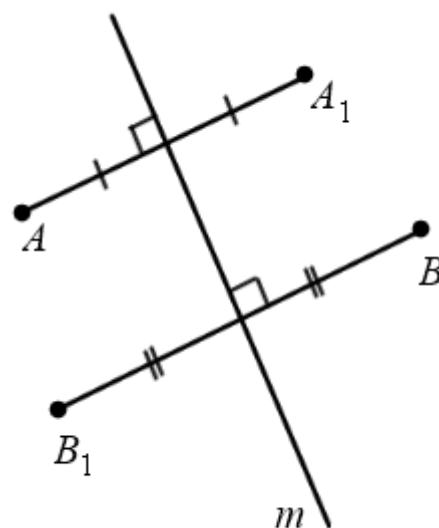
Рис.1

При повороте все точки плоскости за исключением центра поворота перемещаются, центр поворота остается на месте. Центральную симметрию можно рассматривать как поворот на угол в  $180^\circ$ . При осевой симметрии все точки плоскости за исключением точек, лежащих на оси симметрии  $m$ , перемещаются. Все точки прямой  $m$  остаются на месте.

Иногда в теоретических исследованиях рассматриваются сдвиги на нулевой вектор и повороты на нулевой угол. При таких сдвигах и поворотах все точки плоскости остаются на месте. В данной работе такие сдвиги и повороты не используются.



Поворот  
( $O$  – центр поворота,  $\alpha$  – угол поворота)

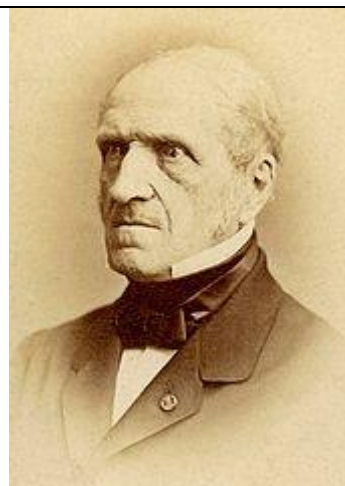


Симметрия относительно прямой  
( $m$  – ось симметрии)

Рис.2

Теорема Шаля утверждает, что все движения плоскости ограничиваются перечисленными движениями или их несколькими последовательными применениями.

Именно решения классических геометрических задач, основанные на использовании различных свойств движений, и определили концепцию данного проекта.



**Мишель Шаль, 1793-1880, французский математик, член Парижской, Петербургской и многих других академий наук**

**4. Определение доступных ресурсов.** Для реализации данного проекта требуются небольшие финансовые ресурсы. Компьютер со стандартным офис-

ным программным обеспечением и выходом на большую электронную доску, а также микрофон предоставляет школа «Свиблово». Руководителем проекта является учитель математики школы «Свиблово» Шиленкова Елена Валентиновна. Дополнительные финансовые средства предоставлены родителями автора проекта и направлены в типографию для цветной печати стенда, с которым должен выступать автор проекта во время стендового доклада.

## **5. План выполнения проекта.**

1 этап. Разработка концепции проекта (июнь 2017 г.).

2 этап. Подбор задач для интерактивных уроков (июль 2017 г.).

3 этап. Подготовка решений задач (август-сентябрь 2017 г.).

4 этап. Подготовка рисунков к решениям задач (октябрь-ноябрь 2017 г.).

5 этап. Подготовка текста проектной работы (ноябрь 2017 г.).

6 этап. Подготовка компьютерной презентации (декабрь 2017 г.).

7 этап. Подготовка стенда для стендового доклада (январь 2017 г.).

**6. Реализация плана, корректировка.** Первые 4 этапа плана выполнения проекта реализованы с опережением графика. При работе над 5-м этапом выяснилось, что текст проектной работы оказывается слишком длинным, и, после консультации с руководителем проекта Шиленковой Е.В., большинство решений задач были перенесены в Приложение к проектной работе. 6-й и 7-й этапы плана выполнения проекта реализованы с опережением графика.

## **7. Список задач для проведения интерактивных уроков по геометрии на тему: «Движения плоскости вместо вычислений»**

### **7.1. Задача, решаемая с помощью сдвига**

**Задача 7.1.1. (Мост через реку).** Города  $A$  и  $B$  расположены на разных берегах реки. В каком месте нужно построить мост через реку, чтобы путь от города  $A$  до города  $B$  был кратчайшим?

### **7.2. Задачи, решаемые с помощью центральной симметрии**

**Задача 7.2.1. (Построение отрезка с заданной серединой).** Дан острый угол  $ABC$  с вершиной  $B$  и точка  $D$  внутри него. Найти на сторонах угла такие точки  $E$  и  $F$ , чтобы точка  $D$  была серединой отрезка  $EF$ .

**Задача 7.2.2. (Две касающиеся окружности).** Две окружности с центрами  $O_1$  и  $O_2$  и равными радиусами  $R$  касаются внешним образом в точке  $A$ . Точки  $B$  и  $C$  лежат на разных окружностях, причем хорды  $BA$  и  $CA$  перпендикулярны. Доказать, что расстояние  $BC$  равно  $2R$ .

### 7.3. Задачи, решаемые с помощью поворота

**Задача 7.3.1. (Восстановление квадрата).** Восстановить квадрат  $ABCD$ , если известен его центр  $O$  и точки  $F$  и  $E$ , расположенные на сторонах  $AB$  и  $BC$  соответственно.

**Задача 7.3.2. (Построение равностороннего треугольника).** Дан угол  $ABC$  с вершиной  $B$  и точка  $D$  внутри него. На сторонах угла  $AB$  и  $BC$  найти точки  $E$  и  $F$  так, чтобы треугольник  $EFD$  был равносторонним.

**Задача 7.3.3. (Точки Торричелли и Ферма).** Дан остроугольный треугольник. Точкой **Ферма** называют такую точку, расположенную внутри треугольника, сумма расстояний от которой до вершин треугольника минимальна. Точкой **Торричелли** называют такую точку, расположенную внутри треугольника, из которой каждая сторона треугольника видна под углом в  $120^\circ$ . Доказать, что точки **Торричелли** и **Ферма** совпадают и построить точку **Торричелли-Ферма**.



**Пьер Ферма, 1601-1665, французский математик, по профессии юрист, сформулировал Великую теорему Ферма**



**Эванджелиста Торричелли, 1608-1647, итальянский математик и физик, помощник Галилео Галилея, изобретатель ртутного барометра**

**Задача 7.3.4. (Задача Наполеона).** На сторонах произвольного треугольника как на основаниях вне треугольника построены равносторонние треугольники. Доказать, что центры этих равносторонних треугольников также являются вершинами равностороннего треугольника.

**Наполеон Бонапарт, 1769-1821.**

**Французский генерал, полководец, государственный деятель, император, потерпел сокрушительное поражение в войне 1812 года против России, покровитель наук и ученых, хороший математик**



#### **7.4. Задачи, решаемые с помощью осевой симметрии**

**Задача 7.4.1. (Задача Герона Александрийского).** Города  $A$  и  $B$  расположены на одном берегу реки  $MN$ . Курьер должен доставить донесение из города  $A$  в город  $B$ , напоив в реке коня. По какому пути нужно двигаться курьеру, чтобы пройденное им расстояние было наименьшим?

**Герон Александрийский**


**По-видимому, жил в 1 веке н. э., но годы жизни неизвестны, великий древнегреческий математик, физик, механик и инженер**



**Задача 7.4.2. (Построение треугольника наименьшего периметра с двумя вершинами на сторонах угла).** Дан острый угол  $ABC$  и точка  $D$  внутри него. На сторонах угла найти точки  $E$  и  $F$  так, чтобы периметр треугольника  $DEF$  был наименьшим.



**Задача 7.4.3. (Задача Фаньяно).** На сторонах остроугольного треугольника  $ABC$  найти такие точки  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$ , чтобы периметр треугольника  $A_1B_1C_1$  был наименьшим.

<p><b>Джулио-Карло ди Фаньяно,</b> <b>1682-1766.</b> <b>Итальянский математик и инженер,</b> <b>математику изучил самостоятельно</b></p>	
--	--

**Задача 7.4.4. (Задача о нахождении бильярдной траектории).** На бильярдном столе в форме прямоугольника  $ABCD$  без луз лежат шары  $M$  и  $N$ . Игрок бьет кием по шару  $M$ . После этого шар  $M$  ударяется в сторону  $AB$ , затем в сторону  $BC$ , потом в сторону  $CD$  и попадает в шар  $N$ . Найти путь шара  $M$ .

**7.5. Задача, составленная автором проекта и решаемая без вычислений с помощью поворота**

**Задача 7.5.1. (Задача о двух ромбах).** У ромбов  $ABCD$  и  $MNPК$  вершины  $A$  и  $M$  совпадают, а углы при вершинах  $A$  и  $M$  равны. При обходе по направлению  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$  ромб  $ABCD$  остается справа, так же и при обходе по направлению  $M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow K$  ромб  $MNPК$  остается справа. Доказать, что отрезки  $BN$  и  $DK$  равны, а угол между ними равен углу  $A$ .

**7.6. Задача, составленная автором проекта и решаемая без вычислений с помощью осевой симметрии**

**Задача 7.6.1. (Задача о замкнутой бильярдной траектории).** Бильярдный стол без луз имеет форму квадрата  $ACDF$ , на сторонах  $AC$  и  $FD$  которого как на диаметрах вне квадрата построены полукруги (рис.20 из Приложения 1). Найти какую-нибудь замкнутую траекторию движения бильярдного шара, имеющую 6 звеньев.

**8. Оценка эффективности и результативности.** Автор проекта считает, что проект разработан по актуальной и важной теме, название которой соответствует содержанию проекта, проектный замысел реализован полностью, материал изложен наглядно, доступно для слушателей и должен вызвать интерес у учащихся. Автор проекта надеется, что проведение интерактивных уроков в школе по геометрии на тему: «Движения плоскости вместо вычислений» – это эффективный и результативный метод, позволяющий значительно повысить уровень знаний школьников по геометрии. Одной из возможностей дальнейшего развития проекта является разработка интерактивных уроков по геометрии на тему: «Движения пространства вместо вычислений».

### **9. Литература**

1. Яглом И. М. Геометрические преобразования, в 2-х т. – М.: ГИТТЛ. 1956.
2. Моденов П. С., Пархоменко А. С. Геометрические преобразования – М.: Изд-во МГУ, 1961.
3. Понарин Я. П. Элементарная геометрия: В 2 т. – Т. 1: Планиметрия, преобразования плоскости. – М.: МЦНМО, 2004. – 312 с.: ил. ISBN 5-94057-170-0, ISBN 5-94057-171-9 (том 1)
4. Прасолов В. В. Задачи по геометрии. 5-е изд. испр. и доп. – М.: МЦНМО, 2006 – 640 с. ISBN 5-94057-214-6

### **10. Приложения**

**10.1. Приложение 1. Полные решения задач для проведения интерактивных уроков по геометрии на тему: «Движения плоскости вместо вычислений»**

**10.2. Приложение 2. Демонстрационные материалы к решениям задач для проведения интерактивных уроков по геометрии на тему: «Движения плоскости вместо вычислений» (документ в формате PowerPoint)**