Учебный центр «Резольвента»

Кандидат физико-математических наук, доцент

С. С. САМАРОВА

РЕШЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Учебно-методическое пособие

для подготовки к ЕГЭ по математике

Пример 1. Решить неравенство

$$125\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{3x^2}\le\left(\frac{1}{25}\right)^{-4x}.$$

Решение.

$$125\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{3x^2}\le\left(\frac{1}{25}\right)^{-4x}\Leftrightarrow 5^3\cdot 5^{-3x^2}\le 5^{(-2)\cdot(-4x)}\Leftrightarrow 5^{-3x^2+3}\le 5^{8x}\Leftrightarrow -3x^2+3\le 8x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+8x-3\ge 0$$

Чтобы решить последнее неравенство, найдем корни соответствующего квадратного уравнения:

$$3x^2+8x-3=0\Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-8\pm\sqrt{64+36}}{6}=\frac{-8\pm 10}{6}\Leftrightarrow x_1=-3,\ x_2=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Следовательно,

$$3x^2+8x-3\ge 0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-3\right]\cup\left[\frac{1}{3},+\infty\right).$$

Ответ: $x\in\left(-\infty,-3\right]\cup\left[\frac{1}{3},+\infty\right).$

Пример 2. Решить неравенство

$$\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^{x-2}+8\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{x-1}{2}}\le 3^x$$

Решение.

$$\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^{x-2}+8\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{x-1}{2}}\le 3^x \Leftrightarrow 3^{-2}\cdot 3^{(-3)\cdot(x-2)}+8\cdot 3^{(-2)\cdot\left(\frac{x-1}{2}\right)}\le 3^x \Leftrightarrow 3^{-3x+4}+8\cdot 3^{1-x}\le 3^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^4}{3^{3x}}+8\cdot\frac{3}{3^x}\le 3^x \Leftrightarrow 3^4+8\cdot 3\cdot 3^{2x}\le 3^{4x} \Leftrightarrow 3^{4x}-24\cdot 3^{2x}-3^4\ge 0.$$

Таким образом, задача свелась к решению неравенства

$$3^{4x}-24\cdot 3^{2x}-3^4\ge 0. \qquad (2)$$

Чтобы решить неравенство (2), совершим замену переменного

$$3^{2x}=y,\ y>0$$

и найдем корни соответствующего квадратного уравнения:

$$y^2-24\cdot y-81=0 \Leftrightarrow y_{1,2}=\frac{24\pm\sqrt{576+324}}{2}=\frac{24\pm 30}{2} \Leftrightarrow y_1=-3,\ y_2=27 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2-24\cdot y-81=(y+3)(y-27)$$

Следовательно,

$$3^{4x}-24\cdot 3^{2x}-3^4\ge 0 \Leftrightarrow \left(3^{2x}+3\right)\left(3^{2x}-27\right)\ge 0 \Leftrightarrow \left(3^{2x}-27\right)\ge 0 \Leftrightarrow 3^{2x}\ge 3^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x\ge 3 \Leftrightarrow x\ge\frac{3}{2}.$$

Ответ: $x\ge\frac{3}{2}.$

Пример 3. Решить неравенство

$$(0,4)^x-(2,5)^{x+1}>1,5 \qquad (3)$$

Решение. Поскольку

$$0,4=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}=\left(\frac{5}{2}\right)^{-1}=(2,5)^{-1},$$

то неравенство (3) можно переписать в следующем виде:

$$(0,4)^x-(2,5)^{x+1}>1,5\Leftrightarrow(2,5)^{-x}-(2,5)^{x+1}>1,5\Leftrightarrow\frac{1}{(2,5)^x}-(2,5)\cdot(2,5)^x>1,5\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-(2,5)\cdot(2,5)^{2x}>(1,5)\cdot(2,5)^x\Leftrightarrow(2,5)\cdot(2,5)^{2x}+(1,5)\cdot(2,5)^x-1<0$$

Таким образом, задача свелась к решению неравенства

$$(2,5)\cdot(2,5)^{2x}+(1,5)\cdot(2,5)^x-1<0. \qquad (4)$$

Чтобы решить неравенство (4), совершим замену переменного

$$(2,5)^x=y$$

и найдем корни соответствующего квадратного уравнения:

$$(2,5)\cdot y^2+(1,5)\cdot y-1=0\Leftrightarrow y_{1,2}=\frac{-1,5\pm\sqrt{2,25+10}}{5}=\frac{-1,5\pm3,5}{5}\Leftrightarrow y_1=-1,\ y_2=0,4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(2,5)\cdot y^2+(1,5)\cdot y-1=2,5(y+1)(y-0,4).$$

Следовательно,

$$(2,5)\cdot(2,5)^{2x}+(1,5)\cdot(2,5)^x-1<0\Leftrightarrow 2,5\Big((2,5)^x+1\Big)\Big((2,5)^x-0,4\Big)<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(2,5)^x-0,4<0\Leftrightarrow(2,5)^x<0,4\Leftrightarrow\left(\frac{5}{2}\right)^x<\frac{2}{5}\Leftrightarrow\left(\frac{5}{2}\right)^x<\left(\frac{5}{2}\right)^{-1}\Leftrightarrow x<-1.$$

Ответ: $x<-1.$

Пример 4. Решить неравенство

$$7^{-x}-3\cdot7^{1+x}>4$$

Решение.

$$7^{-x}-3\cdot7^{1+x}>4\Leftrightarrow\frac{1}{7^x}-21\cdot7^x>4\Leftrightarrow1-21\cdot7^{2x}>4\cdot7^x\Leftrightarrow21\cdot7^{2x}+4\cdot7^x-1<0$$

Чтобы решить неравенство

$$21\cdot7^{2x}+4\cdot7^x-1<0,$$

совершим замену переменного

$$7^x=y,$$

и найдем корни соответствующего квадратного уравнения:

$$21y^2+4y-1=0 \Leftrightarrow y_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16+84}}{42}=\frac{-4\pm 10}{42} \Leftrightarrow y_1=-\frac{1}{3},\ y_2=\frac{1}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 21y^2+4y-1=21\left(y+\frac{1}{3}\right)\left(y-\frac{1}{7}\right).$$

Следовательно,

$$21\cdot 7^{2x}+4\cdot 7^x-1<0 \Leftrightarrow 21\left(7^x+\frac{1}{3}\right)\left(7^x-\frac{1}{7}\right)<0 \Leftrightarrow \left(7^x-\frac{1}{7}\right)<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7^x<\frac{1}{7} \Leftrightarrow 7^x<7^{-1} \Leftrightarrow x<-1.$$

Ответ: $x<-1.$

Пример 5. Решить неравенство

$$3^{4x^2-3x+0,5}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-40x^2}$$

Решение.

$$3^{4x^2-3x+0,5}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-40x^2} \Leftrightarrow 3^{4x^2-3x+0,5}<3^{40x^2} \Leftrightarrow 4x^2-3x+0,5<40x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 36x^2+3x-0,5>0 \Leftrightarrow 72x^2+6x-1>0.$$

Чтобы решить последнее неравенство, найдем корни соответствующего квадратного уравнения

$$72x^2+6x-1=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{36+288}}{144}=\frac{-6\pm 18}{144} \Leftrightarrow x_1=-\frac{1}{6},\ x_2=\frac{1}{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 72x^2+6x-1=72\left(x+\frac{1}{6}\right)\left(x-\frac{1}{12}\right).$$

Следовательно,

$$72x^2+6x-1>0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-\frac{1}{6}\right)\cup\left(\frac{1}{12},+\infty\right)$$

Ответ: $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{6}\right)\cup\left(\frac{1}{12},+\infty\right).$

Пример 6. Решить неравенство

$$2^{x-1}-3^x>3^{x-1}-2^{x+2}$$

Решение.

$$2^{x-1}-3^x>3^{x-1}-2^{x+2}\Leftrightarrow 2^{x-1}+2^{x+2}>3^{x-1}+3^x\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot 2^x+4\cdot 2^x>\frac{1}{3}\cdot 3^x+3^x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{2}\cdot 2^x>\frac{4}{3}\cdot 3^x\Leftrightarrow \frac{9}{2}\cdot\frac{3}{4}>\frac{3^x}{2^x}\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^3>\left(\frac{3}{2}\right)^x\Leftrightarrow x<3.$$

Ответ: $x<3.$

Пример 7. Решить неравенство

$$(0,01)^{5-\frac{x^2}{2}}\le 10^{\left|x^2+10x\right|+2}$$

Решение. Поскольку

$$(0,01)^{5-\frac{x^2}{2}}\le 10^{\left|x^2+10x\right|+2}\Leftrightarrow 10^{(-2)\cdot\left(5-\frac{x^2}{2}\right)}\le 10^{\left|x^2+10x\right|+2}\Leftrightarrow x^2-10\le\left|x^2+10x\right|+2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|x^2+10x\right|+12-x^2\ge 0,$$

то задача свелась к решению неравенства с модулем:

$$\left|x^2+10x\right|+12-x^2\ge 0. \qquad (5)$$

Чтобы решить неравенство (5), рассмотрим два случая.

Случай 1.

$$\underline{x^2+10x\ge 0\Leftrightarrow x\in(-\infty,-10]\cup[0,+\infty).}$$

В этом случае

$$\left|x^2+10x\right|=x^2+10x$$

и неравенство (5) принимает вид:

$$\begin{cases} x^2+10x+12-x^2\ge 0 \\ x\in(-\infty,-10]\cup[0,+\infty) \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} 10x+12\ge 0 \\ x\in(-\infty,-10]\cup[0,+\infty) \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\frac{6}{5} \\ x\in(-\infty,-10]\cup[0,+\infty) \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in[0,+\infty).$$

Случай 2.

$$x^2+10x<0\Leftrightarrow x\in(-10,0)$$

В этом случае

$$\left|x^2+10x\right|=-x^2-10x$$

и неравенство (5) принимает вид:

$$\begin{cases} -x^2-10x+12-x^2\ge 0 \\ x\in(-10,\,0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2-10x+12\ge 0 \\ x\in(-10,\,0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5x-6\le 0 \\ x\in(-10,\,0) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-6,\,1) \\ x\in(-10,\,0) \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-6,\,0).$$

Объединяя результаты, полученные в каждом из случаев, получаем ответ задачи.

Ответ: $x\in(-6,+\infty)$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить неравенства:

1. $\sqrt{32}\cdot 2^{-4x^2}\ge 8^{3x}$
2. $\sqrt{32}\cdot 2^{-4x^2}\ge 8^{3x}$
3. $4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5x^2}\le\left(\frac{1}{8}\right)^{-3x}$
4. $\sqrt{27}\cdot 3^{-6x^2}\ge 9^{4x}$
5. $\sqrt{7}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{x^2}{2}}\ge\left(\frac{1}{49}\right)^{4-4x}$
6. $\sqrt[3]{16}\cdot 4^{-3x^2}\ge 64^{\frac{x}{3}}$
7. $\frac{1}{125}\cdot 5^{-2x^2}\ge 5^{5x}$
8. $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x^2}\le\sqrt[3]{9}\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^{x}$
9. $8^x<6\cdot 4^{\frac{3-x}{2}}+2^{1+x}$
10. $\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{x-2}<3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+2^x$
11. $9^{\frac{x+1}{2}}+3^{2-x}<2\cdot 27^{1-x}$
12. $5^{x+1}-2\cdot 5^{1-x}<3\cdot 5^{2-3x}$

13. $(0,1)^{x+1} < 0,8 + 2 \cdot 10^{x}$

14. $-4 \cdot 7^{1-x} + 7^{1+x} < 3 \cdot 7^{2-3x}$

15. $11^{x^2-5x} \ge \left(\frac{1}{121}\right)^{-|x-9|-2x}$

16. $\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{x^2}{2}} \le 5^{|x^2+8x|-10}$

17. $2^{x^2-8x} \ge \left(\frac{1}{4}\right)^{x-|2x-12|}$

18. $\left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{x^2}{2}} \le 9^{|x^2+6x|-8}$

19. $\left(\frac{1}{49}\right)^{2x-\frac{x^2}{2}} \ge 7^{|2x-10|+x}$

20. $3 \cdot 9^{-\frac{x^2}{2}} \le \frac{1}{9} \cdot 3^{|x^2+5x|}$

21. $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-\frac{x^2}{2}} \ge 2^{|3x-12|+2x}$

22. $5^{x} - 5^{3-x} > 20$

23. $9^{x} - 9^{1-x} > 8$

24. $3^{1+x} - 3^{2-x} < 26$

25. $\left(\frac{1}{7}\right)^{-9x^2-8x+3} < 7^{-7x^2}$

26. $5^{x^2+x-1} > \left(\frac{1}{5}\right)^{5x^2}$

27. $2^{2x^2-x-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{10x^2}$

28. $110 \cdot 11^{x-1} - 2 \cdot 2^{x-1} < 2^{x} - 11^{x}$

29. $5^{x} + 2 \cdot 7^{x-1} > 7^{x} - 2 \cdot 5^{x-1}$

30. $45 \cdot 9^{x} - 32 \cdot 4^{x-1} > 2 \cdot 4^{x+1} - 4 \cdot 9^{x+1}$

31. $2^{x+1} + 5^{x-2} < 5^{x-1} - 2^{x-1}$

32. $4 \cdot 5^{x} + 3^{x+1} > 5^{x+1} + 2 \cdot 3^{x-2}$

33. $15 \cdot 2^{x} + 7^{x-1} > 2^{x+6} - 7^{x}$

34. $2 \cdot 3^{x} + 6 \cdot 7^{x-1} < 7^{x} + 5 \cdot 3^{x-3}$