

**Кандидат физико-математических наук, доцент**

**С. С. САМАРОВА**

**РЕШЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ**

**Учебно-методическое пособие для школьников по математике**

**© С. С. Самарова, 2010**

**Пример 1.** Решить неравенство

$$125 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{3x^2} \leq \left(\frac{1}{25}\right)^{-4x}.$$

**Решение.**

$$\begin{aligned} 125 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{3x^2} \leq \left(\frac{1}{25}\right)^{-4x} &\Leftrightarrow 5^3 \cdot 5^{-3x^2} \leq 5^{(-2)(-4x)} \Leftrightarrow 5^{-3x^2+3} \leq 5^{8x} \Leftrightarrow -3x^2 + 3 \leq 8x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3x^2 + 8x - 3 \geq 0 \end{aligned}$$

Чтобы решить последнее неравенство, найдем корни соответствующего квадратного уравнения:

$$3x^2 + 8x - 3 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 36}}{6} = \frac{-8 \pm 10}{6} \Leftrightarrow x_1 = -3, x_2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Следовательно,

$$3x^2 + 8x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3] \cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right).$$

**Ответ:**  $x \in (-\infty, -3] \cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right).$

**Пример 2.** Решить неравенство

$$\frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^{x-2} + 8 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{x-1}{2}} \leq 3^x$$

**Решение.**

$$\begin{aligned} \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^{x-2} + 8 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{x-1}{2}} \leq 3^x &\Leftrightarrow 3^{-2} \cdot 3^{(-3)(x-2)} + 8 \cdot 3^{(-2)\left(\frac{x-1}{2}\right)} \leq 3^x \Leftrightarrow 3^{-3x+4} + 8 \cdot 3^{1-x} \leq 3^x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{3^4}{3^{3x}} + 8 \cdot \frac{3}{3^x} \leq 3^x \Leftrightarrow 3^4 + 8 \cdot 3 \cdot 3^{2x} \leq 3^{4x} \Leftrightarrow 3^{4x} - 24 \cdot 3^{2x} - 3^4 \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, задача свелась к решению неравенства

$$3^{4x} - 24 \cdot 3^{2x} - 3^4 \geq 0. \quad (2)$$

Чтобы решить неравенство (2), совершим замену переменного

$$3^{2x} = y, y > 0$$

и найдем корни соответствующего квадратного уравнения:

$$y^2 - 24 \cdot y - 81 = 0 \Leftrightarrow y_{1,2} = \frac{24 \pm \sqrt{576 + 324}}{2} = \frac{24 \pm 30}{2} \Leftrightarrow y_1 = -3, y_2 = 27 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y^2 - 24 \cdot y - 81 = (y + 3)(y - 27)$$

Следовательно,

$$3^{4x} - 24 \cdot 3^{2x} - 3^4 \geq 0 \Leftrightarrow (3^{2x} + 3)(3^{2x} - 27) \geq 0 \Leftrightarrow (3^{2x} - 27) \geq 0 \Leftrightarrow 3^{2x} \geq 3^3 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}.$$

**Ответ:**  $x \geq \frac{3}{2}$ .

**Пример 3.** Решить неравенство

$$(0,4)^x - (2,5)^{x+1} > 1,5 \quad (3)$$

**Решение.** Поскольку

$$0,4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-1} = (2,5)^{-1},$$

то неравенство (3) можно переписать в следующем виде:

$$(0,4)^x - (2,5)^{x+1} > 1,5 \Leftrightarrow (2,5)^{-x} - (2,5)^{x+1} > 1,5 \Leftrightarrow \frac{1}{(2,5)^x} - (2,5) \cdot (2,5)^x > 1,5 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 1 - (2,5) \cdot (2,5)^{2x} > (1,5) \cdot (2,5)^x \Leftrightarrow (2,5) \cdot (2,5)^{2x} + (1,5) \cdot (2,5)^x - 1 < 0$$

Таким образом, задача свелась к решению неравенства

$$(2,5) \cdot (2,5)^{2x} + (1,5) \cdot (2,5)^x - 1 < 0. \quad (4)$$

Чтобы решить неравенство (4), совершим замену переменного

$$(2,5)^x = y$$

и найдем корни соответствующего квадратного уравнения:

$$(2,5) \cdot y^2 + (1,5) \cdot y - 1 = 0 \Leftrightarrow y_{1,2} = \frac{-1,5 \pm \sqrt{2,25 + 10}}{5} = \frac{-1,5 \pm 3,5}{5} \Leftrightarrow y_1 = -1, y_2 = 0,4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2,5) \cdot y^2 + (1,5) \cdot y - 1 = 2,5(y + 1)(y - 0,4).$$

Следовательно,

$$(2,5) \cdot (2,5)^{2x} + (1,5) \cdot (2,5)^x - 1 < 0 \Leftrightarrow 2,5 \left( (2,5)^x + 1 \right) \left( (2,5)^x - 0,4 \right) < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2,5)^x - 0,4 < 0 \Leftrightarrow (2,5)^x < 0,4 \Leftrightarrow \left( \frac{5}{2} \right)^x < \frac{2}{5} \Leftrightarrow \left( \frac{5}{2} \right)^x < \left( \frac{5}{2} \right)^{-1} \Leftrightarrow x < -1.$$

**Ответ:**  $x < -1$ .

**Пример 4.** Решить неравенство

$$7^{-x} - 3 \cdot 7^{1+x} > 4$$

**Решение.**

$$7^{-x} - 3 \cdot 7^{1+x} > 4 \Leftrightarrow \frac{1}{7^x} - 21 \cdot 7^x > 4 \Leftrightarrow 1 - 21 \cdot 7^{2x} > 4 \cdot 7^x \Leftrightarrow 21 \cdot 7^{2x} + 4 \cdot 7^x - 1 < 0$$

Чтобы решить неравенство

$$21 \cdot 7^{2x} + 4 \cdot 7^x - 1 < 0,$$

совершим замену переменного

$$7^x = y,$$

и найдем корни соответствующего квадратного уравнения:

$$21y^2 + 4y - 1 = 0 \Leftrightarrow y_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 84}}{42} = \frac{-4 \pm 10}{42} \Leftrightarrow y_1 = -\frac{1}{3}, y_2 = \frac{1}{7} \Rightarrow \\ \Rightarrow 21y^2 + 4y - 1 = 21 \left( y + \frac{1}{3} \right) \left( y - \frac{1}{7} \right).$$

Следовательно,

$$21 \cdot 7^{2x} + 4 \cdot 7^x - 1 < 0 \Leftrightarrow 21 \left( 7^x + \frac{1}{3} \right) \left( 7^x - \frac{1}{7} \right) < 0 \Leftrightarrow \left( 7^x - \frac{1}{7} \right) < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 7^x < \frac{1}{7} \Leftrightarrow 7^x < 7^{-1} \Leftrightarrow x < -1.$$

**Ответ:**  $x < -1$ .

**Пример 5.** Решить неравенство

$$3^{4x^2 - 3x + 0,5} < \left( \frac{1}{3} \right)^{-40x^2}$$

**Решение.**

$$3^{4x^2-3x+0,5} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-40x^2} \Leftrightarrow 3^{4x^2-3x+0,5} < 3^{40x^2} \Leftrightarrow 4x^2 - 3x + 0,5 < 40x^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 36x^2 + 3x - 0,5 > 0 \Leftrightarrow 72x^2 + 6x - 1 > 0.$$

Чтобы решить последнее неравенство, найдем корни соответствующего квадратного уравнения

$$72x^2 + 6x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 288}}{144} = \frac{-6 \pm 18}{144} \Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{6}, x_2 = \frac{1}{12} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 72x^2 + 6x - 1 = 72\left(x + \frac{1}{6}\right)\left(x - \frac{1}{12}\right).$$

Следовательно,

$$72x^2 + 6x - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{1}{6}\right) \cup \left(\frac{1}{12}, +\infty\right)$$

**Ответ:**  $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{6}\right) \cup \left(\frac{1}{12}, +\infty\right).$

**Пример 6.** Решить неравенство

$$2^{x-1} - 3^x > 3^{x-1} - 2^{x+2}$$

**Решение.**

$$2^{x-1} - 3^x > 3^{x-1} - 2^{x+2} \Leftrightarrow 2^{x-1} + 2^{x+2} > 3^{x-1} + 3^x \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2^x + 4 \cdot 2^x > \frac{1}{3} \cdot 3^x + 3^x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{9}{2} \cdot 2^x > \frac{4}{3} \cdot 3^x \Leftrightarrow \frac{9}{2} \cdot \frac{3}{4} > \frac{3^x}{2^x} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^3 > \left(\frac{3}{2}\right)^x \Leftrightarrow x < 3.$$

**Ответ:**  $x < 3.$

**Пример 7.** Решить неравенство

$$(0,01)^{5-\frac{x^2}{2}} \leq 10^{|x^2+10x|+2}$$

**Решение.** Поскольку

$$(0,01)^{5-\frac{x^2}{2}} \leq 10^{|x^2+10x|+2} \Leftrightarrow 10^{(-2)\left(5-\frac{x^2}{2}\right)} \leq 10^{|x^2+10x|+2} \Leftrightarrow x^2 - 10 \leq |x^2 + 10x| + 2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |x^2 + 10x| + 12 - x^2 \geq 0,$$

то задача свелась к решению неравенства с модулем:

$$|x^2 + 10x| + 12 - x^2 \geq 0. \quad (5)$$

Чтобы решить неравенство (5), рассмотрим два случая.

Случай 1.

$$\underline{x^2 + 10x \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -10] \cup [0, +\infty)}.$$

В этом случае

$$|x^2 + 10x| = x^2 + 10x$$

и неравенство (5) принимает вид:

$$\begin{cases} x^2 + 10x + 12 - x^2 \geq 0 \\ x \in (-\infty, -10] \cup [0, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x + 12 \geq 0 \\ x \in (-\infty, -10] \cup [0, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{6}{5} \\ x \in (-\infty, -10] \cup [0, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x \in [0, +\infty).$$

Случай 2.

$$x^2 + 10x < 0 \Leftrightarrow x \in (-10, 0)$$

В этом случае

$$|x^2 + 10x| = -x^2 - 10x$$

и неравенство (5) принимает вид:

$$\begin{cases} -x^2 - 10x + 12 - x^2 \geq 0 \\ x \in (-10, 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2 - 10x + 12 \geq 0 \\ x \in (-10, 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5x - 6 \leq 0 \\ x \in (-10, 0) \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-6, 1) \\ x \in (-10, 0) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-6, 0).$$

Объединяя результаты, полученные в каждом из случаев, получаем ответ задачи.

**Ответ:**  $x \in (-6, +\infty)$ .

## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

### Решить неравенства:

1.  $\sqrt{32} \cdot 2^{-4x^2} \geq 8^{3x}$

2.  $\sqrt{32} \cdot 2^{-4x^2} \geq 8^{3x}$

3.  $4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5x^2} \leq \left(\frac{1}{8}\right)^{-3x}$

4.  $\sqrt{27} \cdot 3^{-6x^2} \geq 9^{4x}$

5.  $\sqrt{7} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{x^2}{2}} \geq \left(\frac{1}{49}\right)^{4-4x}$

6.  $\sqrt[3]{16} \cdot 4^{-3x^2} \geq 64^{\frac{x}{3}}$

7.  $\frac{1}{125} \cdot 5^{-2x^2} \geq 5^{5x}$

8.  $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x^2} \leq \sqrt[3]{9} \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^x$

9.  $8^x < 6 \cdot 4^{\frac{3-x}{2}} + 2^{1+x}$

10.  $\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{x-2} < 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2^x$

11.  $9^{\frac{x+1}{2}} + 3^{2-x} < 2 \cdot 27^{1-x}$

12.  $5^{x+1} - 2 \cdot 5^{1-x} < 3 \cdot 5^{2-3x}$

13.  $(0,1)^{x+1} < 0,8 + 2 \cdot 10^x$

14.  $-4 \cdot 7^{1-x} + 7^{1+x} < 3 \cdot 7^{2-3x}$

15.  $11^{x^2-5x} \geq \left(\frac{1}{121}\right)^{-|x-9|-2x}$

16.  $\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{x^2}{2}} \leq 5^{|x^2+8x|-10}$

$$17. 2^{x^2-8x} \geq \left(\frac{1}{4}\right)^{x-|2x-12|}$$

$$18. \left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{x^2}{2}} \leq 9^{|x^2+6x|-8}$$

$$19. \left(\frac{1}{49}\right)^{2x-\frac{x^2}{2}} \geq 7^{|2x-10|+x}$$

$$20. 3 \cdot 9^{-\frac{x^2}{2}} \leq \frac{1}{9} \cdot 3^{|x^2+5x|}$$

$$21. \left(\frac{1}{4}\right)^{x-\frac{x^2}{2}} \geq 2^{|3x-12|+2x}$$

$$22. 5^x - 5^{3-x} > 20$$

$$23. 9^x - 9^{1-x} > 8$$

$$24. 3^{1+x} - 3^{2-x} < 26$$

$$25. \left(\frac{1}{7}\right)^{-9x^2-8x+3} < 7^{-7x^2}$$

$$26. 5^{x^2+x-1} > \left(\frac{1}{5}\right)^{5x^2}$$

$$27. 2^{2x^2-x-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{10x^2}$$

$$28. 110 \cdot 11^{x-1} - 2 \cdot 2^{x-1} < 2^x - 11^x$$

$$29. 5^x + 2 \cdot 7^{x-1} > 7^x - 2 \cdot 5^{x-1}$$

$$30. 45 \cdot 9^x - 32 \cdot 4^{x-1} > 2 \cdot 4^{x+1} - 4 \cdot 9^{x+1}$$

$$31. 2^{x+1} + 5^{x-2} < 5^{x-1} - 2^{x-1}$$

$$32. 4 \cdot 5^x + 3^{x+1} > 5^{x+1} + 2 \cdot 3^{x-2}$$

$$33. 15 \cdot 2^x + 7^{x-1} > 2^{x+6} - 7^x$$

$$34. 2 \cdot 3^x + 6 \cdot 7^{x-1} < 7^x + 5 \cdot 3^{x-3}$$



Сайт: [www.resolventa.ru](http://www.resolventa.ru) , E-mail: [resolventa@list.ru](mailto:resolventa@list.ru)

Сайт: [www.resolventa.ru](http://www.resolventa.ru) , E-mail: [resolventa@list.ru](mailto:resolventa@list.ru)