**Кандидат физико-математических наук, доцент**

**С. С. САМАРОВА**

# ФИГУРЫ НА КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ, ЗАДАННЫЕ НЕРАВЕНСТВАМИ

**Учебно-методическое пособие для школьников по математике**

Начнем с рассмотрения простых задач.

**Задача 1.** Изобразить на координатной плоскости *XOY* фигуру *M*, состоящую из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$xy < 0.$$

**Решение.** Поскольку

$$\{xy < 0\} \Leftrightarrow \{x < 0,\ y > 0\} \cup \{x > 0,\ y < 0\},$$

то фигура *M* является объединением 2-го и 4-го квадрантов координатной плоскости (рис.1).

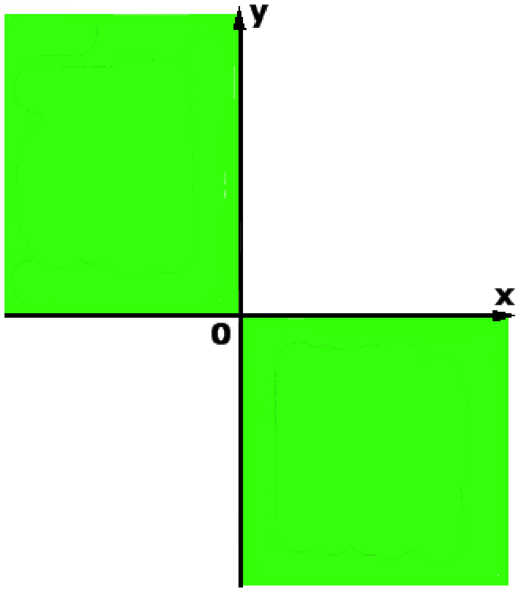


Рис.1

**Задача 2.** Изобразить на координатной плоскости *XOY* фигуру *M*, состоящую из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$2x + 3y > 6. \qquad (1)$$

**Решение.**

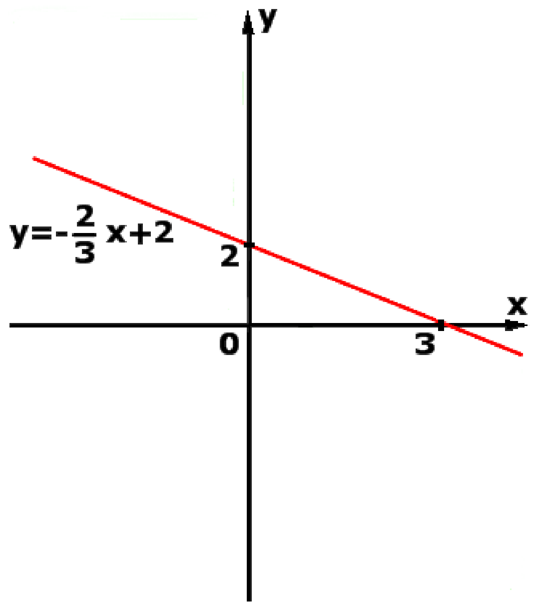


Рис.2

Преобразуем сначала неравенство (1) к равносильной форме:

$$y > -\frac{2}{3}x + 2, \tag{2}$$

и нарисуем на координатной плоскости *XOY* график функции

$$y = -\frac{2}{3}x + 2, \tag{3}$$

представляющий собой прямую линию (рис.2).

Прямая линия (3) делит плоскость на две полуплоскости ─ верхнюю и нижнюю. Докажем, что координаты каждой точки, лежащей в верхней полуплоскости, удовлетворяют неравенствам (1) и (2), а координаты каждой точки, лежащей в нижней полуплоскости, удовлетворяют неравенству

$$2x + 3y < 6,$$

а также равносильному ему неравенству

$$y < -\frac{2}{3}x + 2. \tag{4}$$

С этой целью проведем через произвольную точку $B$, лежащую в верхней полуплоскости, прямую $l$, параллельную оси $OY$, и обозначим точку пересечения прямых $l$ и (3) буквой $A$. Координаты $\left(x_0; y_0\right)$ точки $A$ связаны соотношением

$$y_0 = -\frac{2}{3}x_0 + 2,$$

а точка $B$ имеет координаты $\left(x_0; y_1\right)$, причем выполняется неравенство $y_1 > y_0$, а вместе с ним и неравенство (2). Совершенно аналогично доказывается, что координаты каждой точки, лежащей в нижней полуплоскости, удовлетворяют неравенству (4).

Следовательно, фигура $M$, заданная неравенством (1), изображается так, как показано на рис. 3.

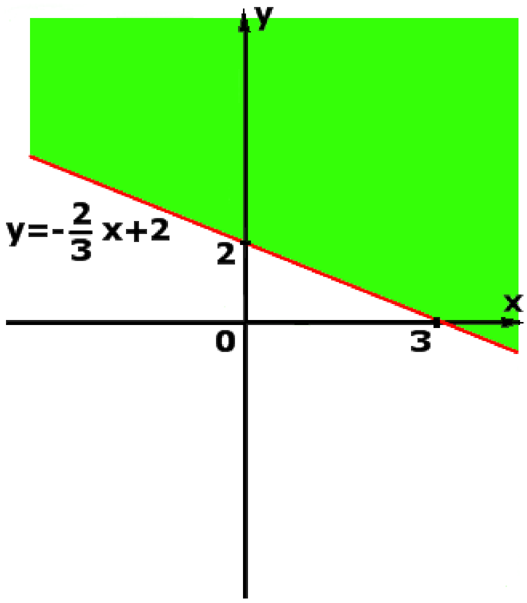


Рис. 3

**Задача 3.** Изобразить на координатной плоскости $XOY$ фигуру $M$, состоящую из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$y > x^2 - 1. \qquad (5)$$

**Решение.** Парабола

$$y = x^2 - 1,$$

ветви которой направлены вверх (рис. 4), делит плоскость на две части ─ внутренность параболы и внешность параболы.

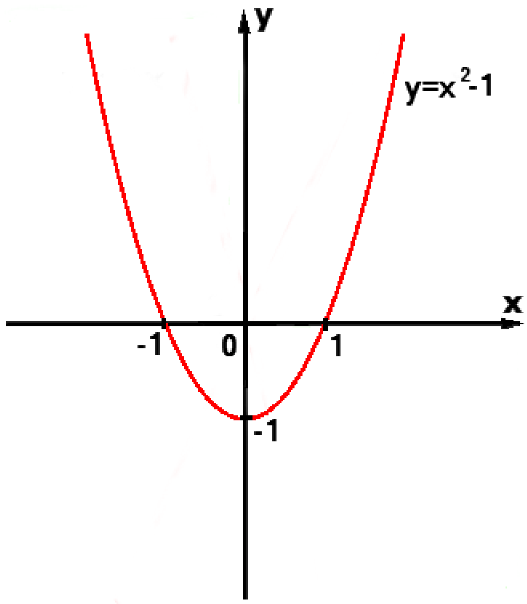


Рис. 4

Почти дословно повторяя доказательство, проведенное при решении задачи 2, заключаем, что координаты каждой точки, лежащей во внутренности параболы, удовлетворяют неравенствам (5), а координаты каждой точки, лежащей во внешности параболы, удовлетворяют неравенству

$$y < x^2 - 1.$$

Следовательно, фигура *M*, заданная неравенством (5), изображается так, как показано на рис. 5.

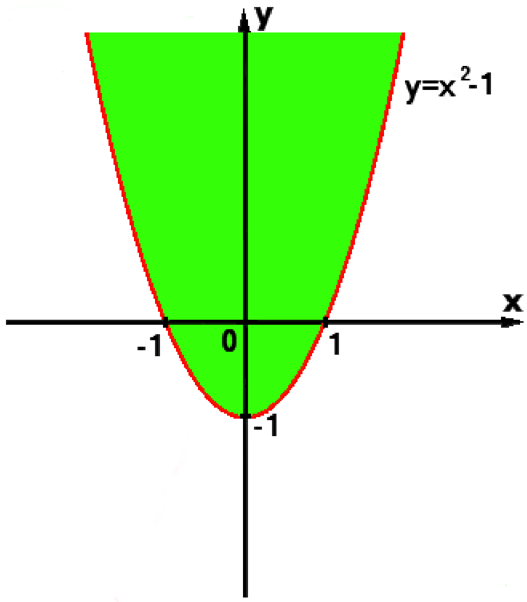


Рис. 5

**Задача 4.** Изобразить на координатной плоскости *XOY* фигуру *M*, состоящую из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$y < |x + 2| . \tag{6}$$

**Решение.** График функции

$$y = |x + 2|$$

изображен на рис. 6. Почти дословно повторяя доказательство, проведенное при решении задач 2 и 3, заключаем, что фигура *M*, заданная неравенством (6), изображается так, как показано на рис. 7.

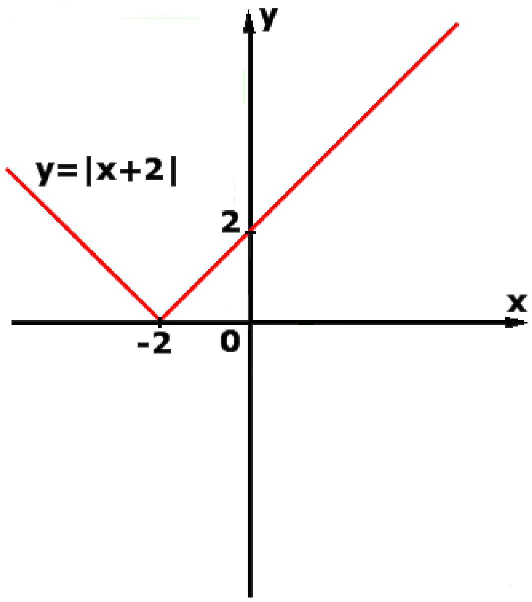


Рис. 6

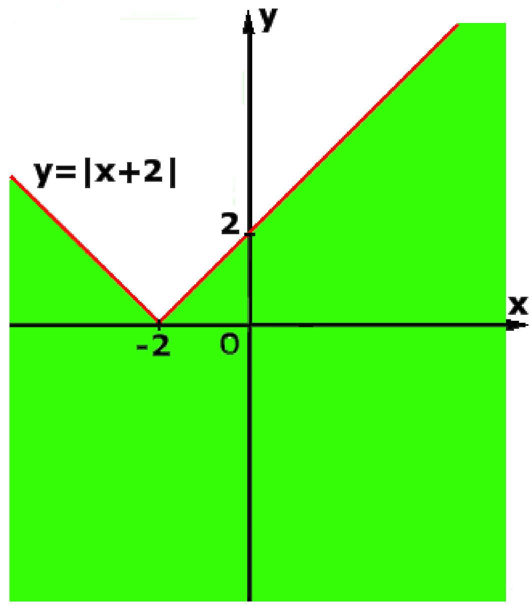

Рис. 7

**Задача 5.** Изобразить на координатной плоскости *XOY* фигуру *M*, состоящую из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$x^2 + y^2 < 4. \qquad (7)$$

**Решение.** Уравнение с двумя переменными

$$x^2 + y^2 = 4$$

задает на координатной плоскости окружность радиуса 2 с центром в начале координат. Эта окружность делит плоскость на две части — внутренность круга и внешность круга. Каждая точка, лежащая вне круга, отделена от начала координат на расстояние, большее, чем 2, а каждая точка, лежащая внутри круга, отделена от начала координат на расстояние, меньшее, чем 2. Следовательно, фигура *M*, заданная неравенством (7), является внутренностью круга (рис. 8)

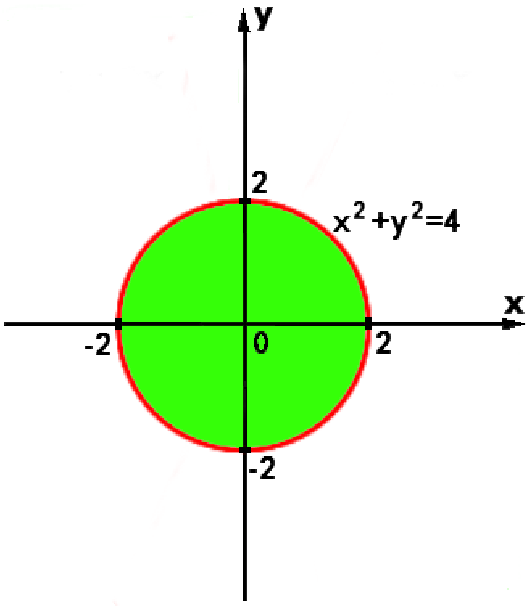


Рис. 8

**Задача 6.** Изобразить на координатной плоскости *XOY* фигуру *M*, состоящую из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$y^2 + xy - 6x^2 > 0. \qquad (8)$$

**Решение.** Разложим многочлен, стоящий в левой части неравенства (8) на множители. С этой целью, решая относительно $y$ уравнение

$$y^2 + xy - 6x^2 = 0,$$

получаем

$$y^2 + xy - 6x^2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + 24x^2}}{2} = \frac{-x \pm 5x}{2} \Leftrightarrow y_1 = -3x,\ y_2 = 2x.$$

Таким образом, разложение на множители многочлена из левой части неравенства (8) имеет вид:

$$y^2 + xy - 6x^2 = (y + 3x)(y - 2x).$$

Следовательно,

$$y^2 + xy - 6x^2 > 0 \Leftrightarrow (y + 3x)(y - 2x) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y + 3x > 0, \\ y - 2x > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y + 3x < 0, \\ y - 2x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > -3x, \\ y > 2x \end{cases} \cup \begin{cases} y < -3x, \\ y < 2x, \end{cases}$$

и задача сводится к изображению фигуры, заданной неравенствами:

$$\begin{cases} y > -3x, \\ y > 2x \end{cases} \cup \begin{cases} y < -3x, \\ y < 2x \end{cases} \qquad (9)$$

Для того, чтобы изобразить на координатной плоскости фигуру, заданную неравенствами (9), нарисуем на координатной плоскости прямые $y = -3x$ и $y = 2x$. Эти прямые проходят через начало координат и делят координатную плоскость на 4 части (рис. 9).

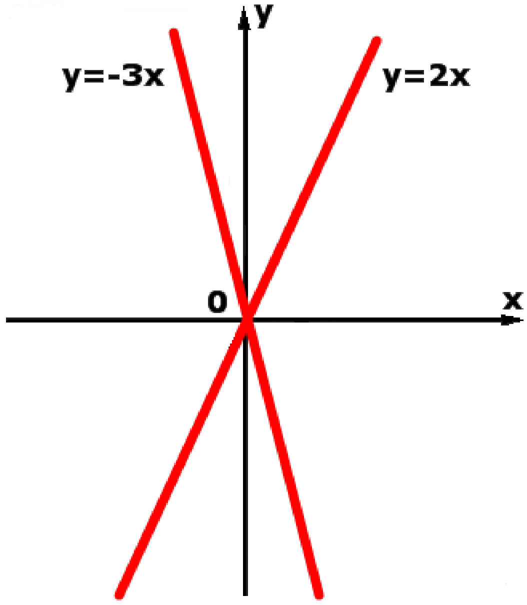


Рис. 9

Точки, координаты которых удовлетворяют системе (9), а, тем самым, и неравенству (8), изображены на рис. 10. При этом точки, координаты которых, удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y > -3x, \\ y > 2x, \end{cases}$$

лежат в верхней части фигуры *M*, а точки, координаты которых, удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y < -3x, \\ y < 2x, \end{cases}$$

лежат в нижней части фигуры *M*.

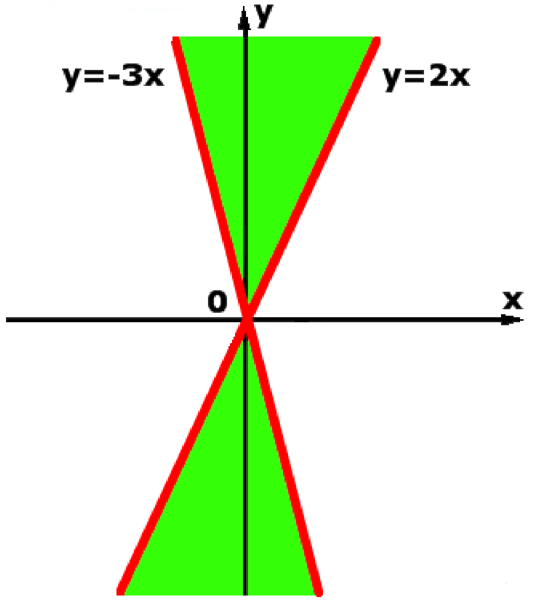


Рис. 10

**Задача 7.** Изобразить на координатной плоскости *XOY* фигуру *M*, состоящую из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\left(y - x - 1\right)\left(y + 2x - 4\right) < 0. \tag{10}$$

**Решение.** Левая часть неравенства (10) уже разложена на множители, поэтому

$$(y-x-1)(y+2x-4)<0 \Leftrightarrow \begin{cases} y-x-1>0, \\ y+2x-4<0 \end{cases} \cup \begin{cases} y-x-1<0, \\ y+2x-4>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y>x+1, \\ y<-2x+4 \end{cases} \cup \begin{cases} y<x+1, \\ y>-2x+4, \end{cases}$$

и задача сводится к изображению фигуры, заданной неравенствами:

$$\begin{cases} y>x+1, \\ y<-2x+4 \end{cases} \cup \begin{cases} y<x+1, \\ y>-2x+4. \end{cases} \qquad (11)$$

Для того, чтобы изобразить на координатной плоскости фигуру, заданную неравенствами (11), нарисуем на координатной плоскости прямые $y=x+1$ и $y=-2x+4$. Эти прямые проходят через точку с координатами $(x=1;\, y=2)$ и делят координатную плоскость на 4 части (рис. 11).

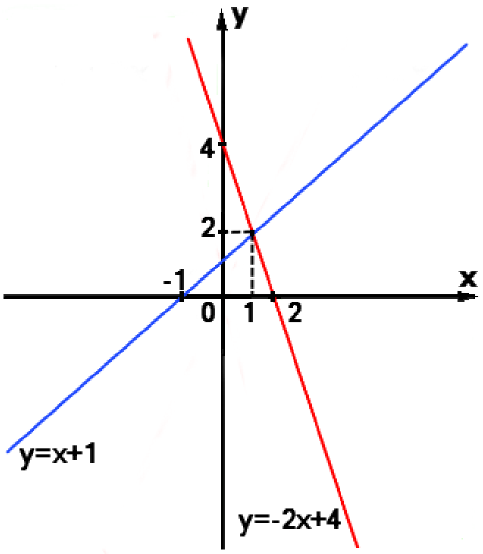


Рис. 11

Точки, координаты которых удовлетворяют системе (11), а, тем самым, и неравенству (10), изображены на рис. 12.

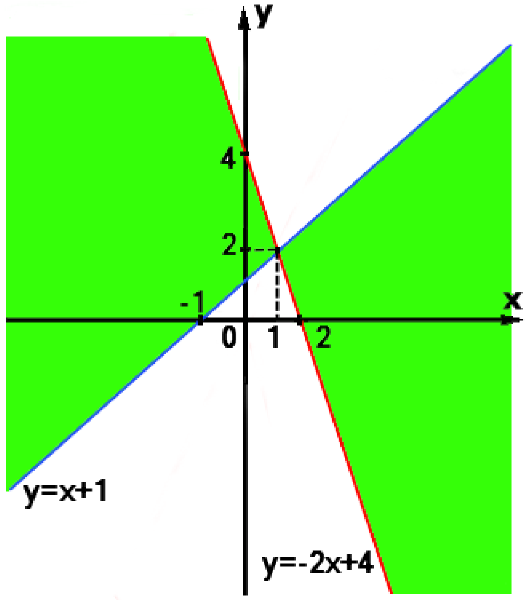


Рис.12

При этом точки, координаты которых, удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y > x + 1, \\ y < -2x + 4, \end{cases}$$

лежат в левой части фигуры *M*, а точки, координаты которых, удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y < x + 1, \\ y > -2x + 4, \end{cases}$$

лежат в правой части фигуры *M*.

**Задача 8.** Изобразить на координатной плоскости *XOY* фигуру *M*, состоящую из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\frac{y - x}{x - 1} > x. \tag{12}$$

**Решение.** Преобразуем сначала неравенство (12) к равносильной форме:

$$\frac{y-x}{x-1} > x \Leftrightarrow \frac{y-x}{x-1} - x > 0 \Leftrightarrow \frac{y - x - x^2 + x}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{y - x^2}{x-1} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - x^2 > 0, \\ x - 1 > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y - x^2 < 0, \\ x - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > x^2, \\ x > 1 \end{cases} \cup \begin{cases} y < x^2, \\ x < 1 \end{cases}.$$

Теперь нарисуем на координатной плоскости две линии: параболу $y = x^2$ и прямую $x = 1$ (рис. 13).

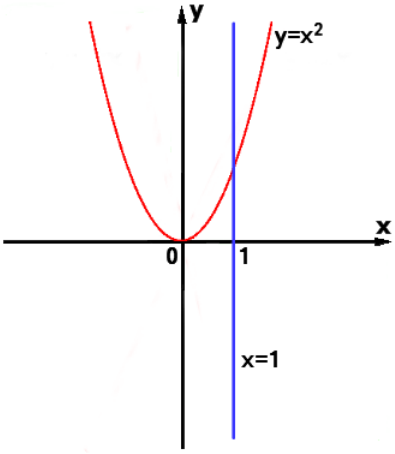


Рис. 13

Фигура *M*, заданная неравенством (12), изображена на рис.14.

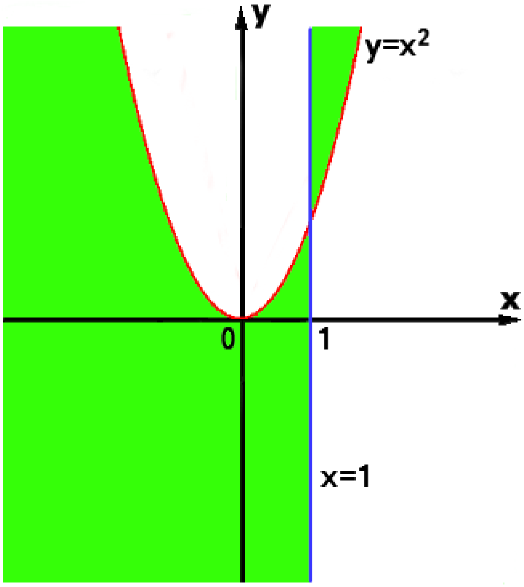


Рис. 14

**Задача 9**. Изобразить на координатной плоскости *XOY* фигуру *M*, состоящую из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\frac{1-y^2}{x} > x. \tag{13}$$

**Решение.** Преобразуем сначала неравенство (13) к равносильной форме:

$$\frac{1-y^2}{x} > x \Leftrightarrow \frac{1-y^2}{x} - x > 0 \Leftrightarrow \frac{1-y^2-x^2}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2-1}{x} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-1>0, \\ x<0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2+y^2-1<0, \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2>1, \\ x<0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2+y^2<1, \\ x>0 \end{cases}.$$

Теперь нарисуем на координатной плоскости две линии: окружность радиуса 1 с центром в начале координат, задаваемую уравнением

$$x^2+y^2=1$$

и прямую (ось ординат), задаваемую уравнением $x=0$ (рис. 15).

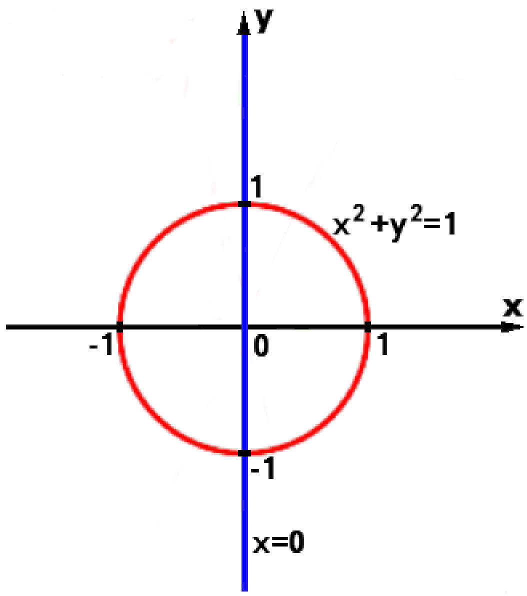


Рис. 15

Фигура *M*, заданная неравенством (13), изображена на рис.16.

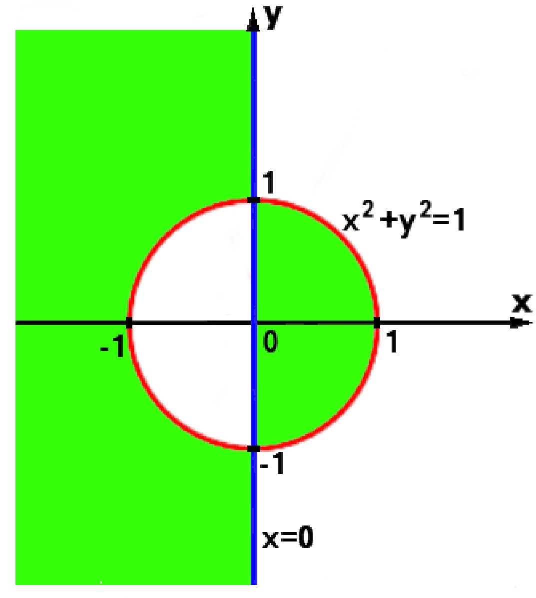


Рис. 16

**Задача 10**. Изобразить на координатной плоскости *XOY* фигуру *M*, состоящую из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$xy > 2. \qquad (14)$$

**Решение.** Напомним, что при делении неравенства на положительное число, знак неравенства сохраняется, а при делении неравенства на отрицательное число, знак неравенства меняется на противоположный. Заметим также, что координаты точек, лежащих на оси ординат, задаваемой уравнением $x = 0$, не удовлетворяют неравенству (14). Поэтому неравенство (14) можно преобразовать к следующей равносильной форме:

$$xy > 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > \dfrac{2}{x} \end{cases} \cup \begin{cases} x < 0 \\ y < \dfrac{2}{x} \end{cases}$$

Теперь изобразим на координатной плоскости гиперболу $y = \dfrac{2}{x}$ и прямую (ось ординат) $x = 0$ (рис. 17).

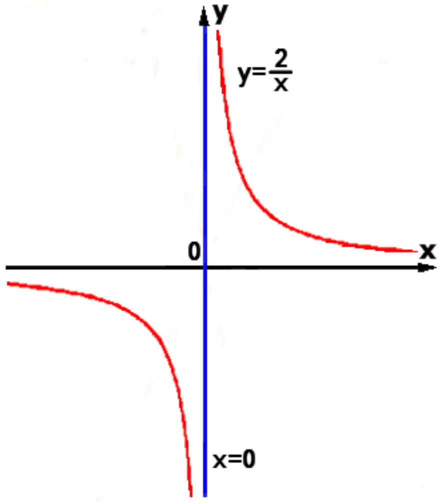


Рис. 17

Фигура *M*, заданная неравенством (14), изображена на рис.18.

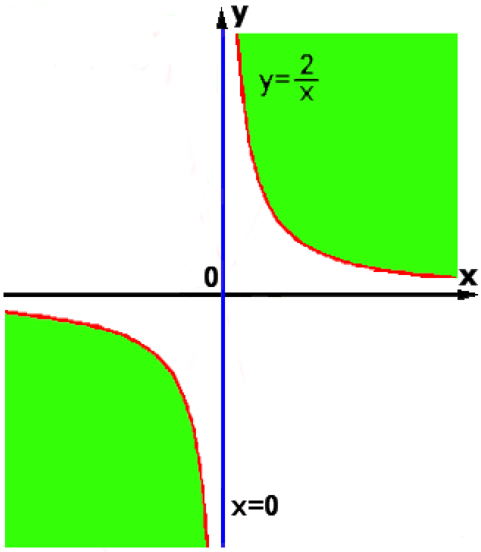


Рис. 18

**Задача 11.** Фигура *M* задана на координатной плоскости неравенствами:

$$2|x| \le y \le |x| + 1. \qquad (15)$$

Изобразить фигуру *M* и найти её площадь.

**Решение.** Фигура *M* имеет вид, изображенный на рис. 19, и состоит из двух равных треугольников $OAB$ и $OBC$, вершины которых имеют следующие координаты: $A = (1;2)$, $B = (0;1)$, $C = (-1;2)$.

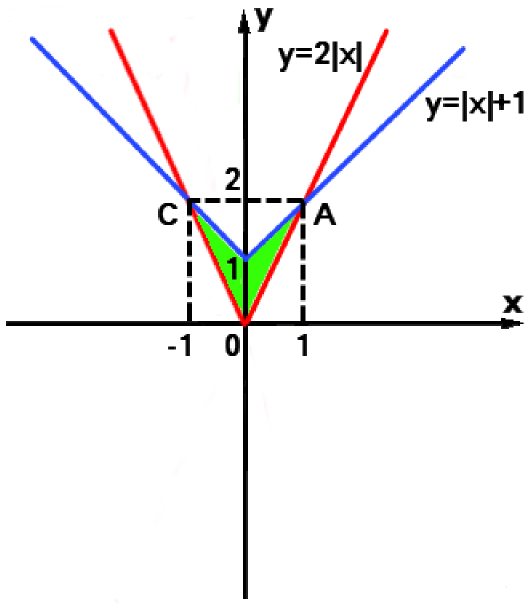


Рис. 19

В треугольнике $OAB$ основание $OB$ равно 1, и высота, опущенная из вершины $A$ на основание, равна 1. Следовательно, площадь треугольника $OAB$ равна $\frac{1}{2}$, а площадь фигуры $M$ равна 1.

**Задача 12.** Фигура $M$ задана на координатной плоскости неравенствами:

$$4|x|-2 \le y \le 3-|x|.$$

Изобразить фигуру $M$ и найти её площадь.

**Решение.** Фигура $M$ имеет вид, изображенный на рис. 20, и состоит из двух равных треугольников $OAB$ и $OBC$, вершины которых имеют следующие координаты: $A=(1;2)$, $B=(0;3)$, $C=(-1;2)$.

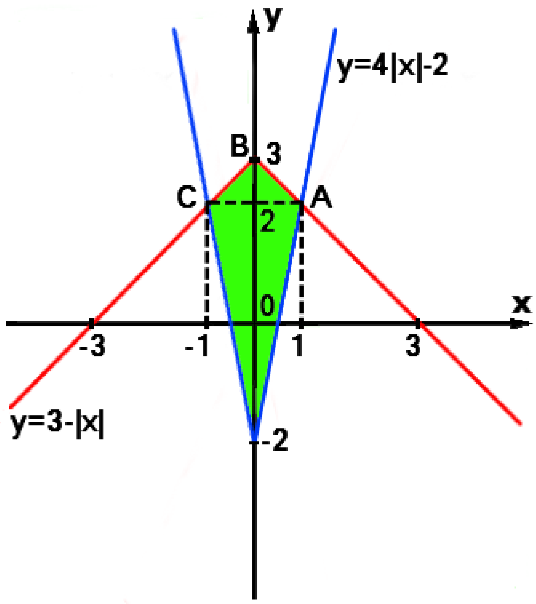


Рис. 20

В треугольнике $OAB$ основание $OB$ равно 3, и высота, опущенная из вершины $A$ на основание, равна 1. Следовательно, площадь треугольника $OAB$ равна $\frac{3}{2}$, а площадь фигуры $M$ равна 3.

**Задача 13.** Фигура $M$ задана на координатной плоскости неравенствами:

$$|x-1| \le y \le 2-|x|.$$

Изобразить фигуру $M$ и найти её площадь.

**Решение.** Фигура $M$ имеет вид, изображенный на рис. 21, и является прямоугольником $ABCD$, вершины которого имеют следующие координаты:

$$A=(1;0),\ B=\left(\frac{-1}{2};\frac{3}{2}\right),\ C=(0;3),\ D=\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right).$$

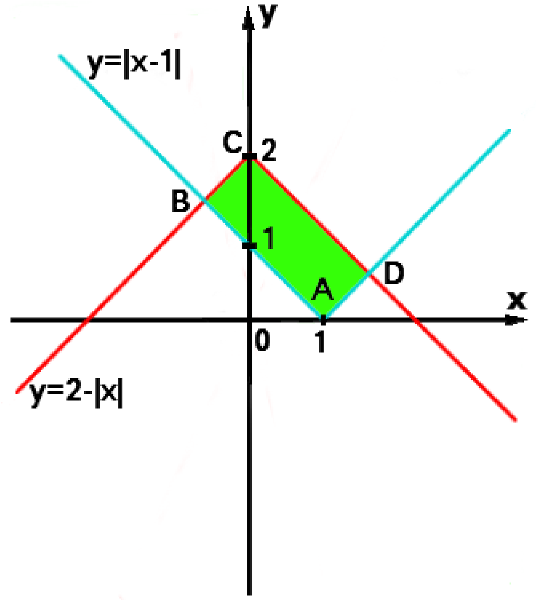


Рис. 21

Поэтому,

$$|AB| = \sqrt{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(0-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}},$$

$$|AD| = \sqrt{\left(1-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(0-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$S_{ABCD} = |AB| \cdot |AD| = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}.$$

Следовательно, площадь фигуры $M$ равна $\frac{3}{2}$.

**Задача 14.** Фигура $M$ задана на координатной плоскости системой неравенств:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \ge 4, \\ x^2 \le 4, \\ (y-x)(y+2) \le 0. \end{cases} \qquad (16)$$

Изобразить фигуру $M$ и найти её площадь.

**Решение.** Первое неравенство системы (16) задает внешность круга радиуса 2 с центром в начале координат. Второе неравенство задает вертикальную полосу: $\{-2 \le x \le 2\}$. Третье неравенство задает пару вертикальных углов, образованных прямыми $y = x$ и $y = -2$.

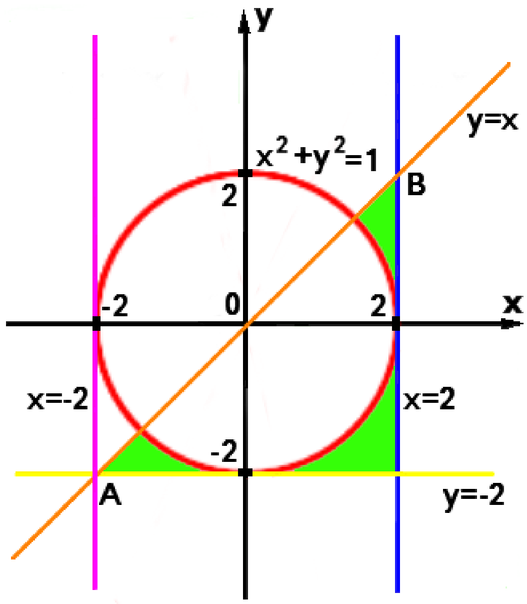


Рис. 22

Следовательно, фигура $M$ имеет вид, изображенный на рис. 22, и является общей частью внутренности прямоугольного треугольника $ABC$ и внешности круга радиуса 2 с центром в начале координат. Вершины треугольника $ABC$ имеют координаты

$$A=(-2;-2),\ B=(2;2),\ C=(2;-2).$$

Площадь треугольника

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BC|=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4=8.$$

Для того, чтобы найти площадь фигуры $M$, остается из площади треугольника $ABC$ вычесть площадь полукруга с радиусом 2:

$$S=8-\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 2^2=8-2\pi.$$

Итак, площадь фигуры $M$ равна $8-2\pi$.

## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Изобразить на координатной плоскости *XOY* фигуру *M*, состоящую из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\frac{y-3x}{x-3}<x.$$

2. Изобразить на координатной плоскости *XOY* фигуру *M*, состоящую из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\frac{4-x^2}{y}<y.$$

3. Изобразить на координатной плоскости *XOY* фигуру *M*, состоящую из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\frac{y-x}{x-2}>1.$$

4. Изобразить на координатной плоскости *XOY* фигуру *M*, состоящую из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$xy<1.$$

5. Фигура *M* задана на координатной плоскости неравенствами:

$$3|x|\le y\le 2|x|+2.$$

Изобразить фигуру *M* и найти её площадь.

6. Фигура *M* задана на координатной плоскости неравенствами:

$$|x|-5\le y\le 1-2|x|.$$

Изобразить фигуру *M* и найти её площадь.

7. Фигура *M* задана на координатной плоскости неравенствами:

$$|x|-6\le y\le -|x+2|.$$

Изобразить фигуру *M* и найти её площадь.

8. Фигура $M$ задана на координатной плоскости неравенствами:

$$-|x| \le y \le 5|x| + 12.$$

Изобразить фигуру $M$ и найти её площадь.

9. Фигура $M$ задана на координатной плоскости неравенствами:

$$-2|x| \le y \le -4|x| + 8.$$

Изобразить фигуру $M$ и найти её площадь.