

Сайт: [www.resolventa.ru](http://www.resolventa.ru), E-mail: [resolventa@list.ru](mailto:resolventa@list.ru)

Доктор физико-математических наук, профессор

К. Л. САМАРОВ

## УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЯМИ

Учебное пособие для школьников по математике

© К. Л. Самаров, 2010

Сайт: [www.resolventa.ru](http://www.resolventa.ru), E-mail: [resolventa@list.ru](mailto:resolventa@list.ru)

**Пример 1.** Решить уравнение

$$|2x+1|=3$$

**Решение.**

$$|2x+1|=3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=3 \\ 2x+1=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=2 \\ 2x=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

**Ответ.** 1; -2

**Пример 2.** Решить уравнение

$$\left| x^3 - \frac{5}{2}x - 2 \right| = \left| x^3 + x^2 + \frac{3}{2}x + 2 \right|$$

**Решение.**

$$\left| x^3 - \frac{5}{2}x - 2 \right| = \left| x^3 + x^2 + \frac{3}{2}x + 2 \right| \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - \frac{5}{2}x - 2 = x^3 + x^2 + \frac{3}{2}x + 2 \\ x^3 - \frac{5}{2}x - 2 = -\left( x^3 + x^2 + \frac{3}{2}x + 2 \right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 4 = 0 \\ 2x^3 + x^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)^2 = 0 \\ x(2x^2 + x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)^2 = 0 \\ x = 0 \\ 2x^2 + x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 0 \\ x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = -1; \frac{1}{2} \end{cases}$$

**Ответ.** -2; -1; 0;  $\frac{1}{2}$

**Пример 3.** Решить уравнение

$$\frac{|x+3|-1}{x-1} = 4$$

**Решение.**

$$\begin{aligned} \frac{|x+3|-1}{x-1} = 4 &\Leftrightarrow \begin{cases} |x+3|-1 = 4x-4 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+3| = 4x-3 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x+3| = 4x-3 \\ 4x-3 \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 = 4x-3 \\ 4x-3 \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x+3 = -(4x-3) \\ 4x-3 \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 3x \\ x \geq \frac{3}{4} \\ x \neq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x+3 = -4x+3 \\ x \geq \frac{3}{4} \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x \geq \frac{3}{4} \\ x \neq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 0 \\ x \geq \frac{3}{4} \\ x \neq 1 \end{cases} &\Leftrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

**Ответ.** 2

**Пример 4.** Решить уравнение

$$|2x^2 - 4x| = 3x - 3$$

**Решение.**

$$\begin{aligned} |2x^2 - 4x| = 3x - 3 &\Leftrightarrow \begin{cases} |2x^2 - 4x| = 3x - 3 \\ 3x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 4x = 3x - 3 \\ 3x - 3 \geq 0 \end{cases} \cup \\ \cup \begin{cases} -(2x^2 - 4x) = 3x - 3 \\ 3x - 3 \geq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 7x + 3 = 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} 2x^2 - x - 3 = 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} \\ x \geq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4} \\ x \geq 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{4} \\ x \geq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x_{3,4} = \frac{1 \pm 5}{4} \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,2} = 3; \frac{1}{2} \\ x \geq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x_{3,4} = -1; \frac{3}{2} \\ x \geq 1 \end{cases} &\Leftrightarrow x = 3 \cup x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

**Ответ.**  $\frac{3}{2}; 3$

**Пример 5.** Решить неравенство

$$|x-3| < 7$$

**Решение.**

$$\begin{aligned} |x-3| < 7 &\Leftrightarrow \begin{cases} x-3 < 7 \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} -(x-3) < 7 \\ x-3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 10 \\ x \geq 3 \end{cases} \cup \begin{cases} x-3 > -7 \\ x-3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in [3, 10) \cup x \in (-4, 3) \Leftrightarrow x \in (-4, 10) \end{aligned}$$

**Ответ.**  $x \in (-4, 10)$

**Пример 6.** Решить неравенство

$$6x^2 - |x| - 2 \leq 0$$

**Решение.** Заметим, что исходное неравенство эквивалентно объединению двух систем неравенств:

$$6x^2 - |x| - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 - x - 2 \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 6x^2 + x - 2 \leq 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

Решим первую систему неравенств. Для этого сначала найдем корни соответствующего квадратного уравнения:

$$6x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{12} = \frac{1 \pm 7}{12} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{2}{3}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} 6x^2 - x - 2 \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right] \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{2}{3}\right]$$

Теперь решим вторую систему неравенств. Для этого найдем корни соответствующего квадратного уравнения:

$$6x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{12} = \frac{-1 \pm 7}{12} \Rightarrow x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = \frac{1}{2}$$

Далее получаем:

$$\begin{cases} 6x^2 + x - 2 \leq 0 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[ -\frac{2}{3}, \frac{1}{2} \right] \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[ -\frac{2}{3}, 0 \right)$$

Объединение решений первой и второй систем неравенств дает ответ задачи.

**Ответ.**  $x \in \left[ -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right]$

**Пример 7.** Решить неравенство

$$2x|x+1| - x - 1 > 0$$

**Решение.** Заметим, что исходное неравенство эквивалентно объединению двух систем неравенств:

$$\begin{aligned} 2x|x+1| - x - 1 > 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x(x+1) - x - 1 > 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} -2x(x+1) - x - 1 > 0 \\ x+1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x - 1 > 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} -2x^2 - 3x - 1 > 0 \\ x+1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x - 1 > 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \cup \begin{cases} 2x^2 + 3x + 1 < 0 \\ x < -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Теперь решим первую систему неравенств. Для этого сначала найдем корни соответствующего квадратного уравнения:

$$2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{2}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} 2x^2 + x - 1 > 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty, -1) \cup x \in \left( \frac{1}{2}, +\infty \right) \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left( \frac{1}{2}, +\infty \right)$$

Теперь решим вторую систему неравенств. Для этого найдем корни соответствующего квадратного уравнения:

$$2x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{-3 \pm 1}{4} \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{2}$$

Далее получаем

$$\begin{cases} 2x^2 + 3x + 1 < 0 \\ x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \\ x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Таким образом, вторая система неравенств решений не имеет, и решение первой системы неравенств дает ответ задачи.

**Ответ.**  $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

**Пример 8.** Найти множество значений параметра  $p$ , при которых уравнение

$$2px - 2x - 4|x - 1| - 1 = 0$$

имеет ровно два корня.

**Решение.** В случае  $x \geq 1$  получаем

$$\begin{aligned} 2px - 2x - 4|x - 1| - 1 = 0 &\Leftrightarrow 2px - 2x - 4(x - 1) - 1 = 0 \Leftrightarrow 2px - 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x(p - 3) = -3 \end{aligned}$$

Таким образом, при  $p \neq 3$  решение уравнения имеет вид

$$x = \frac{-3}{2(p - 3)}, \quad (1)$$

а при  $p = 3$  уравнение решений не имеет. Кроме того, поскольку  $x \geq 1$ , то должно выполняться неравенство

$$\begin{aligned} \frac{-3}{2(p - 3)} \geq 1 &\Leftrightarrow \frac{-3}{p - 3} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{-3}{p - 3} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-3 - 2(p - 3)}{p - 3} \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{3 - 2p}{p - 3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2p - 3}{p - 3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{p - \frac{3}{2}}{p - 3} \leq 0 \Leftrightarrow p \in \left[\frac{3}{2}, 3\right) \end{aligned}$$

В случае  $x < 1$  получаем

$$2px - 2x - 4|x - 1| - 1 = 0 \Leftrightarrow 2px - 2x + 4(x - 1) - 1 = 0 \Leftrightarrow 2px + 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x(p + 1) = 5$$

Таким образом, при  $p \neq -1$  решение уравнения имеет вид

$$x = \frac{5}{2(p + 1)}, \quad (2)$$

а при  $p = -1$  уравнение решений не имеет. Кроме того, поскольку  $x < 1$ , то должно выполняться неравенство

$$\frac{5}{2(p + 1)} < 1 \Leftrightarrow \frac{5}{p + 1} < 2 \Leftrightarrow \frac{5}{p + 1} - 2 < 0 \Leftrightarrow \frac{5 - 2(p + 1)}{p + 1} < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{3 - 2p}{p + 1} < 0 \Leftrightarrow \frac{2p - 3}{p + 1} > 0 \Leftrightarrow \frac{p - \frac{3}{2}}{p + 1} > 0 \Leftrightarrow p \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$$

Следовательно, в случае

$$p \in \left(\frac{3}{2}, 3\right)$$

исходное уравнение имеет 2 решения: решение, определяемое по формуле (1) и удовлетворяющее неравенству  $x \geq 1$ , и решение, определяемое по формуле (2) и удовлетворяющее неравенству  $x < 1$ .

**Ответ.**  $p \in \left(\frac{3}{2}, 3\right)$

**Пример 9.** Найти все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$x^2 + p|x| + \frac{7 - 6p}{4} = 0$$

имеет хотя бы один корень.

**Решение.** Поскольку

$$x^2 + p|x| + \frac{7 - 6p}{4} = 0 \Leftrightarrow |x|^2 + p|x| + \frac{7 - 6p}{4} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow |x|_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - (7 - 6p)}}{2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 + 6p - 7}}{2} = \frac{-p \pm \sqrt{(p + 7)(p - 1)}}{2},$$

то исходное уравнение имеет хотя бы один корень тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$\frac{-p + \sqrt{(p+7)(p-1)}}{2} \geq 0 \Leftrightarrow -p + \sqrt{(p+7)(p-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{(p+7)(p-1)} \geq p.$$

Таким образом, задача свелась к решению неравенства

$$\sqrt{(p+7)(p-1)} \geq p. \quad (3)$$

Для того, чтобы решить неравенство (3), рассмотрим два случая.

В случае  $p < 0$  должны выполняться неравенства

$$\begin{cases} (p+7)(p-1) \geq 0 \\ p < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \in (-\infty, -7) \cup (1, +\infty) \\ p \in (-\infty, 0) \end{cases} \Leftrightarrow p \in (-\infty, -7).$$

Поскольку при этом левая часть неравенства (3) неотрицательна, а правая – отрицательна, то неравенство (3) верно.

В случае  $p \geq 0$  обе части неравенства (3) можно возвести в квадрат:

$$\sqrt{(p+7)(p-1)} \geq p \Leftrightarrow (p+7)(p-1) \geq p^2 \Leftrightarrow 6p - 7 \geq 0 \Leftrightarrow p \in \left[ \frac{7}{6}, +\infty \right)$$

Объединение полученных областей дает ответ задачи.

**Ответ.**  $p \in (-\infty, -7) \cup \left[ \frac{7}{6}, +\infty \right)$

### ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить уравнения

1.  $|3x + 2| = 1$

2.  $|4x - 1| = 1$

3.  $|5x - 2| = 2$

4.  $\frac{3x - 5}{|x - 1| - 4} = 1$

5.  $\frac{|x - 2| + 1}{2x + 1} = -1$



$$6. \frac{7+3x}{|x+1|-6} = -1$$

$$7. |x^2 - 8x + 12| = 3x - 12$$

$$8. |x^2 - 4x| = 3x - 6$$

$$9. |x^2 - 2x - 8| = 8x - 8$$

$$10. |x^2 + 8x| = 6x + 24$$

$$11. |x^2 - 2x - 3| = 3x - 3$$

$$12. |x^2 - 3x| = 4x - 6$$

$$13. |x^2 - x - 2| = 4x - 2$$

$$14. |3x^3 + 12x + 1| = |3x^3 - 18x^2 - 1|$$

$$15. |8x^3 - 5x - 2| = |8x^3 + 4x^2 + 3x + 2|$$

$$16. \left| 8x + \frac{14}{x} - \frac{7}{x^3} \right| = \left| 8x - \frac{18}{x} - \frac{5}{x^3} \right|$$

$$17. \left| -4x + \frac{1}{x} - \frac{3}{2x^3} \right| = \left| -4x - \frac{3}{x} + \frac{5}{2x^3} \right|$$

$$18. |x^3 + 36x + 9| = |x^3 - 18x^2 - 9|$$

$$19. \left| x^3 + 7x - \frac{14}{x} \right| = \left| x^3 - 9x - \frac{10}{x} \right|$$

Решить неравенства

$$20. |x-1| > 3$$

$$21. |2x+1| < 5$$

$$22. |3x-2| < 4$$

$$23. (x-1)|x| - 2x + 2 \leq 0$$

24.  $x^2 - 3|x-1| - 1 \leq 0$

25.  $(x+4)|x| - 3x - 6 > 0$

26.  $x^2 - 2|x| - 3 \geq 0$

27.  $3x|2x-3| + 7x - 8 < 0$

28.  $x^2 - |5x+1| + 5 > 0$

29. Найти множество значений параметра  $p$ , при которых уравнение

$$2px - 4x + 6|x-1| - 3 = 0$$

имеет ровно два корня.

30. Найти множество значений параметра  $p$ , при которых уравнение

$$|x-2| + px + 2x - 1 = 0$$

не имеет корней.

31. Найти все значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$$x^2 - p|x| + \frac{p^2 - p - 6}{4} = 0$$

имеет ровно 4 различных корня.

32. Найти множество значений параметра  $p$ , при которых уравнение

$$|x-2| - px - x + 1 = 0$$

не имеет корней.