Учебный центр «Резольвента»

Доктор физико-математических наук, профессор

К. Л. САМАРОВ

КВАДРАТНЫЙ ТРЕХЧЛЕН

Учебно-методическое пособие для школьников

Квадратным трехчленом относительно x называют многочлен 2-й степени

$$ax^2 + bx + c,$$

где a, b, c - числа, называемые коэффициентами квадратного трехчлена, $a \neq 0$.

Квадратным уравнением называют уравнение относительно x вида:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Решения квадратного уравнения, т.е. значения x, при которых квадратный трехчлен обращается в нуль, называют ***корнями*** квадратного трехчлена (уравнения).

Пример 1. Найти все значения параметра p, при которых один из корней уравнения

$$-3x^2 + 2px + 8p = 0$$

равен 2.

Решение. Подставив в уравнение число $x = 2$, получим

$$-3\cdot 2^2 + 2p\cdot 2 + 8p = 12p - 12 = 0,$$
$$12p = 12, \quad p = 2.$$

Ответ: $p = 2.$

Выделением полного квадрата называют представление квадратного трехчлена в виде:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Чтобы получить эту формулу, проведем следующие вычисления, основой которых является формула для **квадрата суммы двух слагаемых**:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a}\right) =$$
$$= a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$
$$= a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - a\cdot\frac{b^2}{4a^2} + a\cdot\frac{c}{a} = a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} =$$
$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Выделение полного квадрата позволяет также найти **корни** квадратного трехчлена.

Действительно, если квадратный трехчлен имеет корни, то

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0 \Leftrightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Поскольку левая часть последнего выражения неотрицательна, то для того, чтобы у уравнения существовали корни, необходимо и достаточно, чтобы и правая часть была неотрицательной, а это возможно лишь в том случае, когда число

$$D = b^2 - 4ac,$$

называемое **дискриминантом квадратного уравнения**, больше или равно нулю. При этом

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Leftrightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.$$

Итак, **формула корней квадратного уравнения** имеет вид:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Если дискриминант положителен, то квадратное уравнение имеет два различных корня. **Если дискриминант равен нулю**, то квадратное уравнение имеет два совпавших корня. **Если дискриминант отрицателен**, то квадратное уравнение корней не имеет.

Из формулы для корней квадратного уравнения вытекает **теорема Виета**: Корни квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0$$

являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Действительно, если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения, то

$$x_1+x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a},$$

Таким образом, первое уравнение системы выполнено. Чтобы проверить выполнимость второго уравнения системы, нужно воспользоваться одной из формул сокращенного умножения, а именно, **формулой разности квадратов двух чисел**:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \cdot \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2 - \left(b^2 - 4ac\right)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Теорема Виета доказана.

Справедлива и **обратная теорема Виета:**

Если пара чисел (u, v) является решением системы уравнений

$$\begin{cases} u + v = -\dfrac{b}{a}, \\ u \cdot v = \dfrac{c}{a}, \end{cases}$$

то эти числа u и v **являются корнями квадратного уравнения**

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Очень важной является **формула разложения квадратного трехчлена на множители.** Чтобы получить эту формулу, проведем следующие вычисления, основой которых является теорема Виета:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1x_2) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2) =$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = ax^2 + bx + c.$$

Таким образом, **если дискриминант квадратного трехчлена неотрицателен, то квадратный трехчлен раскладывается на множители:**

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

При этом в случае, **когда дискриминант равен нулю,** выполняется соотношение $x_1 = x_2$ и **разложение на множители имеет вид:**

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

Пример 2. Сократить дробь

$$\frac{x^2+6x-7}{x+7}$$

Решение. Разложим сначала квадратный трехчлен, стоящий в числителе дроби, на множители:

$$x^2+6x-7=0,\ x_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{36+28}}{2}=\frac{-6\pm 8}{2},\ x_1=-7,\ x_2=1,$$

$$x^2+6x-7=(x+7)(x-1).$$

Поэтому

$$\frac{x^2+6x-7}{x+7}=\frac{(x+7)(x-1)}{x+7}=x-1.$$

Ответ: $x-1$.

Перейдем теперь к свойствам графика квадратного трехчлена.

График функции $y=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$ называется **параболой**. На рис.1 изображен график параболы $y=x^2$.

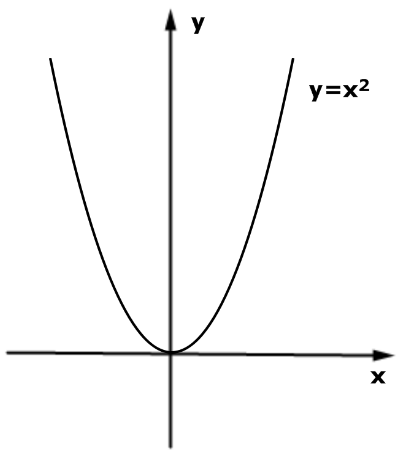

Рис. 1

При $a>0$ ветви параболы $y=ax^2$ направлены вверх. При $a<0$ ветви параболы направлены вниз. Вершина параболы совпадает с началом системы координат.

В соответствии с формулой

$$ax^2+bx+c=0=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a},$$

графиком функции (квадратного трехчлена) $y = ax^2 + bx + c$ **является парабола** $y = ax^2$, **сдвинутая так, чтобы ее вершина** (Рис. 2) **попала в точку** $M_v = (x_v; y_v)$, где

$$x_v = -\frac{b}{2a},$$

$$y_v = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = -\frac{b^2}{4a} + c = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{D}{4a}.$$

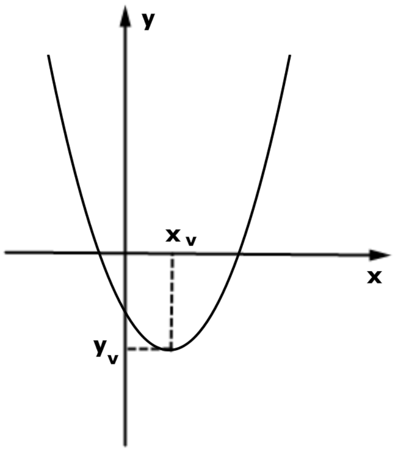

Рис. 2

Последнюю формулу запоминать не нужно. Значение y_v вычисляется при помощи подстановки координаты вершины $x = -\frac{b}{2a}$ в формулу $y = ax^2 + bx + c$.

Парабола $y = ax^2 + bx + c$ пересекает ось ***OY*** в точке с координатами (0, *c*). При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх. При $a < 0$ ветви параболы направлены вниз. В случае $a > 0$ функция $y = ax^2 + bx + c$ в точке x_v достигает наименьшего значения. В случае $a < 0$ функция $y = ax^2 + bx + c$ в точке x_v достигает наибольшего значения.

Если квадратный трехчлен имеет два различных корня (дискриминант положителен), то парабола пересекает ось ***OX*** в точках с координатами $(x_1;0)$ и $(x_2;0)$.

Если квадратный трехчлен имеет два совпавших корня (дискриминант равен 0), то парабола **касается** оси ***OX*** в точке с координатой $(x_v;0)$. В этом случае

$$x_1 = x_2 = x_v = -\frac{b}{2a}.$$

Если квадратный трехчлен корней не имеет (дискриминант отрицателен), то парабола ось ***OX*** вообще не пересекает.

Пример 3. Определить знаки коэффициентов a, b, c, исходя из расположения параболы $ax^2 + bx + c$, изображенной на рис. 2, относительно осей координат (стр. 6).

Решение. Поскольку ветви параболы направлены вверх, то $a > 0$. Поскольку парабола пересекает ось ***OY*** в точке с отрицательной ординатой, то $c < 0$. Поскольку x –я координата вершины параболы $x_v = -\dfrac{b}{2a} > 0$, то, в силу того, что $a > 0$, заключаем, что $b < 0$.

Ответ: $a > 0,\ b < 0,\ c < 0$.

Пример 4. Найти координаты точек пересечения графиков функций

$$y = 5 - x, \quad y = x^2 - 3x + 2.$$

Решение. Координаты $(x;y)$ каждой точки пересечения графиков указанных функций удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} y = 5 - x, \\ y = x^2 - 3x + 2. \end{cases}$$

Поэтому,

$$x^2-3x+2=5-x,\ x^2-2x-3=0,\ x_1=-1,\ x_2=3,$$
$$y_1=5-x_1=6,\ y_2=5-x_2=2.$$

Ответ: $(-1;6),(3;2)$.

Пример 5. Найти все значения параметра *p*, при которых один из корней уравнения

$$(p-2)x^2-(p-4)x-2=0$$

на 3 больше другого.

Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни данного уравнения. По условию задачи и в соответствии с теоремой Виета числа x_1, x_2, p удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{p-4}{p-2}, \\ x_1\cdot x_2=-\dfrac{2}{p-2}, \\ x_2=x_1+3. \end{cases}$$

Решим эту систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{p-4}{p-2} \\ x_1\cdot x_2=-\dfrac{2}{p-2} \\ x_2=x_1+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_1+3=\dfrac{p-4}{p-2} \\ x_1\cdot(x_1+3)=-\dfrac{2}{p-2} \\ x_2=x_1+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1+3=\dfrac{p-4}{p-2} \\ x_1\cdot(x_1+3)=-\dfrac{2}{p-2} \\ x_2=x_1+3 \end{cases}$$

Из первого уравнений полученной системы находим:

$$x_1=\frac{1}{2}\left(\frac{p-4}{p-2}-3\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{p-4-3p+6}{p-2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{-2p+2}{p-2}\right)=-\frac{p-1}{p-2}.$$

Подставим полученное выражение во второе уравнение системы:

$$x_1\cdot(x_1+3)=-\left(\frac{p-1}{p-2}\right)\cdot\left(-\frac{p-1}{p-2}+3\right)=-\left(\frac{p-1}{p-2}\right)\left(\frac{3p-6-p+1}{p-2}\right)=$$
$$=-\left(\frac{p-1}{p-2}\right)\left(\frac{2p-5}{p-2}\right)=-\frac{2}{p-2}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{p-1}{p-2}\right)\left(\frac{2p-5}{p-2}\right)=\frac{2}{p-2}\Rightarrow(p-1)(2p-5)=2(p-2)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2p^2-2p-5p+5=2p-4\Leftrightarrow 2p^2-9p+9=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}p_1=\dfrac{9-\sqrt{81-72}}{4}=\dfrac{9-3}{4}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2},\\ p_2=\dfrac{9+\sqrt{81-72}}{4}=\dfrac{9+3}{4}=\dfrac{12}{4}=3.\end{cases}$$

Ответ: $p_1=\dfrac{3}{2},\ p_2=3.$

Пример 6. Найти все значения параметра p, при которых отношение корней уравнения

$$px^2-(p+3)x+3=0$$

равно (-2).

Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни данного уравнения. По условию задачи и в соответствии с теоремой Виета числа x_1, x_2, p удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{p+3}{p},\\ x_1\cdot x_2=\dfrac{3}{p},\\ x_2=-2x_1.\end{cases}$$

Решим эту систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{p+3}{p} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{3}{p} \\ x_2 = -2x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 = \dfrac{p+3}{p} \\ -2x_1^{\,2} = \dfrac{3}{p} \\ x_2 = -2x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{p+3}{p} \\ -2\left(-\dfrac{p+3}{p}\right)^2 = \dfrac{3}{p} \\ x_2 = -2x_1 \end{cases}$$

Из второго уравнения полученной системы находим:

$$-2\left(-\frac{p+3}{p}\right)^2 = \frac{3}{p} \Rightarrow 2(p+3)^2 = -3p \Leftrightarrow 2p^2 + 12p + 18 = -3p \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2p^2 + 15p + 18 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} p_1 &= \frac{-15 - \sqrt{225-144}}{4} = \frac{-15-9}{4} = -6 \\ p_2 &= \frac{-15 + \sqrt{225-144}}{4} = \frac{-15+9}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \end{aligned} \right.$$

Ответ: $p_1 = -6,\ p_2 = -\dfrac{3}{2}.$

Пример 7. Найти все значения параметра p, при которых сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 - (2p+1)x + p^2 + p - 2 = 0$$

минимальна. Чему равно минимальное значение?

Решение. Поскольку дискриминант уравнения

$$D = (2p+1)^2 - 4\left(p^2 + p - 2\right) = 4p^2 + 4p + 1 - 4p^2 - 4p + 8 = 9,$$

то корни уравнения

$$x_1 = \frac{2p+1-3}{4} = \frac{2p-2}{4} = \frac{1}{2}(p-1),\ x_2 = \frac{2p+1+3}{4} = \frac{2p+4}{4} = \frac{1}{2}(p+2).$$

Следовательно,

$$x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = \frac{1}{4}(p-1)^2 + \frac{1}{4}(p+2)^2 = \frac{1}{4}(p^2 - 2p + 1 + p^2 + 4p + 4) =$$

$$= \frac{1}{4}(p^2 + 2p + 5) = \frac{p^2}{4} + \frac{p}{2} + \frac{5}{4},$$

причем функция

$$f(p) = \frac{p^2}{4} + \frac{p}{2} + \frac{5}{4}$$

достигает минимума в точке

$$p_v = \left. -\frac{1}{2} \right/ 2 \cdot \left(\frac{1}{4} \right) = -1.$$

Наименьшее значение этой функции равно

$$f(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{5}{4} = \frac{8}{4} = 2.$$

Ответ: минимальное значение суммы квадратов корней уравнения равно 2 и достигается при $p = -1$.

Пример 8. Найти все значения параметра p, при которых неравенство

$$px^2 + 8px + 7p - 2 < 0$$

выполняется при всех значениях x.

Решение. Рассмотрим 3 случая: $p>0$, $p=0$, $p<0$.

1. Число p не может быть положительным, т. к. в этом случае ветви параболы направлены вверх и обязательно найдутся такие значения x, при которых значения квадратного трехчлена, стоящего в левой части неравенства, будут положительными.

2. В случае $p=0$ неравенство выполняется при всех значениях x.

3. В случае $p<0$ ветви параболы направлены вниз и для выполнимости неравенства при всех значениях x необходимо и достаточно, чтобы квадратный трехчлен из левой части неравенства не имел корней. Другими словами, его дискриминант должен быть отрицательным:

$$D = 64p^2 - 4p(7p - 2) < 0 \Leftrightarrow 36p^2 + 8p < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p(p + \frac{2}{9}) < 0 \Leftrightarrow p \in \left(-\frac{2}{9}, 0 \right)$$

Добавляя к найденному интервалу точку $p=0$, получаем ответ задачи.

Ответ: $p \in (-\frac{2}{9}, 0]$

Пример 9. Найти все значения параметра p, при которых уравнение

$$(p+3)x^2 + 8x + p^2 + 5p = 0$$

имеет корни разных знаков.

Решение. В случае $p = -3$ уравнение имеет вид $8x - 6 = 0$ и обладает **единственным** корнем $x = \frac{3}{4}$, что не удовлетворяет условию задачи. Следовательно, $p \neq -3$ и уравнение можно разделить на отличное от нуля число $(p+3)$. В результате оно преобразуется к виду:

$$x^2 + \frac{8}{p+3}x + \frac{p(p+5)}{p+3} = 0.$$

Если, x_1 и x_2 — корни этого уравнения, то, по теореме Виета,

$$x_1 x_2 = \frac{p(p+5)}{p+3},$$

причем в случае, когда корни имеют разные знаки, их произведение отрицательно и выполняется неравенство

$$\frac{p(p+5)}{p+3} < 0.$$

С другой стороны, если это неравенство выполняется, то дискриминант уравнения

$$D = \left(\frac{8}{p+3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{p(p+5)}{p+3} > 0,$$

и уравнение имеет два различных корня. Таким образом, наша задача свелась к неравенству

$$\frac{p(p+5)}{p+3} < 0.$$

Решая это неравенство с помощью метода интервалов, получаем ответ задачи.

Ответ: $p \in (-\infty, -5) \cup (-3, 0)$

Пример 10. Найти все значения параметра p, при которых корни уравнения

$$x^2 - px + 1 = 0$$

лежат в интервале (0, 3).

Решение. Для существования корней необходимо и достаточно, чтобы дискриминант уравнения был неотрицателен:

$$D = p^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow p^2 \geq 4 \Leftrightarrow |p| \geq 2 \Leftrightarrow p \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty).$$

Теперь найдем корни уравнения:

$$x_1 = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4}}{2}, \quad x_2 = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4}}{2}.$$

Таким образом, условие задачи можно записать в форме системы неравенств:

$$\begin{cases} 0 < \dfrac{p - \sqrt{p^2 - 4}}{2} \\ \dfrac{p + \sqrt{p^2 - 4}}{2} < 3 \\ p \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < p - \sqrt{p^2 - 4} \\ p + \sqrt{p^2 - 4} < 6 \\ p \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{p^2 - 4} < p \\ \sqrt{p^2 - 4} < 6 - p \\ p \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p^2 - 4 < p^2 \\ p > 0 \\ p^2 - 4 < p^2 - 12p + 36 \\ p < 6 \\ p \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < 0 \\ p > 0 \\ 12p < 40 \\ p < 6 \\ p \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow p \in [2, \frac{10}{3}).$$

Ответ: $p \in [2, \frac{10}{3})$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти все значения параметра a, при которых один из корней уравнения

$$-2x^2 - 3ax + 7a = 0$$

равен 3.

2. Сократить дробь

$$\frac{x^2-7x+12}{2x-6}$$

3. Найти координаты точек пересечения графиков функций

$$y = 3x^2 - 7x - 2 = 0, \quad y = 2x^2 - 5x + 6.$$

4. Найти все значения параметра *p*, при которых один из корней уравнения

$$x^2-(2p+1)x+20p^2=0$$

в 5 раз больше другого.

5. Найти все значения параметра *p*, при которых один из корней уравнения

$$x^2+px-4p+16=0$$

на 4 больше другого.

6. Найти все значения параметра *p*, при которых сумма кубов корней уравнения

$$x^2+2x-p^2+4p-3=0$$

минимальна. Чему равно минимальное значение?

7. Найти все значения параметра *p*, при которых неравенство

$$px^2-5px+2p+3>0$$

выполняется при всех значениях *x*.

8. Найти все значения параметра *p*, при которых уравнение

$$(p+1)x^2+11x+3p^2+7p=0$$

имеет корни разных знаков.

9. Найти все значения параметра *p*, при которых корни уравнения

$$x^2-4(p+2)x+2p^2+2=0$$

меньше 2.

10. Известно, что квадратный трехчлен ax^2+bx+c не имеет корней и его коэффициенты связаны соотношением $4a-2b+c<0$. Найти знаки коэффициентов a и c.