

Учебный центр «Резольвента»

Доктор физико-математических наук, профессор

К. Л. САМАРОВ

РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Учебно-методическое пособие для подготовки
к ЕГЭ по математике

© К. Л. Самаров, 2010

© ООО «Резольвента», 2010

Пример 1. Решить уравнение

$$\sin^2 x = \frac{1}{4}$$

Решение.

$$\sin^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z \\ x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$$

Ответ. $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$

Пример 2. Решить уравнение

$$\cos x - 4 \cos \frac{x}{2} + 1 = 0$$

Решение. С помощью формулы «Косинус двойного угла» получаем:

$$\begin{aligned} \cos x - 4\cos\frac{x}{2} + 1 = 0 &\Leftrightarrow 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 - 4\cos\frac{x}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 4\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 2\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\cos\frac{x}{2}\right) \cdot \left(\cos\frac{x}{2} - 2\right) = 0 \end{aligned}$$

Возникают два случая:

1. $\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi k, k \in Z$
2. $\cos\frac{x}{2} = 2$. В этом случае уравнение решений не имеет.

Ответ. $\pi + 2\pi k, k \in Z$

Пример 3. Решить уравнение

$$3\sin^2 x - \sin x = 2\cos x - 3\sin 2x$$

Решение. Воспользовавшись формулой «Синус двойного угла» и разложением на множители, получаем:

$$\begin{aligned} 3\sin^2 x - \sin x = 2\cos x - 3\sin 2x &\Leftrightarrow \sin x(3\sin x - 1) = 2\cos x - 6\sin x\cos x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin x(3\sin x - 1) = 2\cos x(1 - 3\sin x) &\Leftrightarrow \sin x(3\sin x - 1) - 2\cos x(1 - 3\sin x) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\sin x + 2\cos x)(3\sin x - 1) = 0 \end{aligned}$$

Возникают два случая:

1. $\sin x + 2\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x = -2\cos x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -2 \Leftrightarrow x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi k, k \in Z$
2. $3\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow 3\sin x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = (-1)^k \operatorname{arcsin} \frac{1}{3} + \pi k, k \in Z$

Ответ. $-\operatorname{arctg} 2 + \pi k, k \in Z; (-1)^k \operatorname{arcsin} \frac{1}{3} + \pi k, k \in Z$

Пример 4. Решить уравнение

$$\sin 2x = 2\sqrt{3}\cos^2 x$$

Решение. Воспользовавшись формулой «Синус двойного угла» и разложением на множители, получаем

$$\sin 2x = 2\sqrt{3} \cos^2 x \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x - 2\sqrt{3} \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x (\sin x - \sqrt{3} \cos x) = 0$$

Возникают два случая:

$$1. \sin x - \sqrt{3} \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \sqrt{3} \cos x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$$

$$2. \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$$

Ответ. $\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z; \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

Пример 5. Решить уравнение

$$\frac{\cos x}{1 - \sin x} = 1 + \sin x$$

Решение. Воспользовавшись формулой «Основное тригонометрическое тождество», получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\cos x}{1 - \sin x} = 1 + \sin x &\Leftrightarrow \frac{\cos x}{1 - \sin x} - (1 + \sin x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos x - (1 + \sin x)(1 - \sin x)}{1 - \sin x} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\cos x - (1 - \sin^2 x)}{1 - \sin x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos x - \cos^2 x}{1 - \sin x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos x(1 - \cos x)}{1 - \sin x} = 0 \end{aligned}$$

Возникают два случая:

$$1. \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$$

$$2. 1 - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k, k \in Z$$

Ответ. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z; 2\pi k, k \in Z$

Пример 6. Решить уравнение

$$\frac{\sin 2x}{1 + \sin x} = -2 \cos x$$

Решение. Основой решения задачи является разложение на множители:

$$\begin{aligned} \frac{\sin 2x}{1 + \sin x} = -2 \cos x &\Leftrightarrow \frac{2 \sin x \cos x}{1 + \sin x} + 2 \cos x = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{2 \sin x \cos x + 2 \cos x(1 + \sin x)}{1 + \sin x} = 0 &\Leftrightarrow \frac{2 \cos x(\sin x + 1 + \sin x)}{1 + \sin x} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{2 \cos x(2 \sin x + 1)}{1 + \sin x} = 0 \end{aligned}$$

Возникают два случая:

$$1. \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$$

$$2. \begin{cases} 2 \sin x + 1 = 0 \\ \sin x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2} \\ \sin x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$$

Ответ. $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z; (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$

Пример 7. Решить уравнение

$$\frac{2 \cos x}{\sin 3x + \sin x} = \frac{11}{6} - \frac{1}{2} \sin 2x$$

Решение. Решение задачи основывается на применении формулы «Сумма синусов», с помощью которой исходное уравнение сводится к квадратному уравнению относительно функции $\sin 2x$.

$$\begin{aligned} \frac{2 \cos x}{\sin 3x + \sin x} = \frac{11}{6} - \frac{1}{2} \sin 2x &\Leftrightarrow \frac{2 \cos x}{2 \sin 2x \cos x} = \frac{11}{6} - \frac{1}{2} \sin 2x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sin 2x} = \frac{11}{6} - \frac{1}{2} \sin 2x \\ \cos x \neq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow 1 = \frac{11}{6} \sin 2x - \frac{1}{2} \sin^2 2x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 3 \sin^2 2x - 11 \sin 2x + 6 = 0 &\Leftrightarrow (\sin 2x)_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 72}}{6} = \\ &= \frac{11 \pm 7}{6} \Leftrightarrow (\sin 2x)_1 = \frac{2}{3}, (\sin 2x)_2 = 3 \end{aligned}$$

Возникают два случая:

1.

$$\sin 2x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2x = (-1)^k \arcsin \frac{2}{3} + \pi k, k \in Z \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \cdot (-1)^k \cdot \arcsin \frac{2}{3} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$$

2.

$\sin 2x = 3$. В этом случае уравнение решений не имеет.

Ответ. $\frac{1}{2} \cdot (-1)^k \cdot \arcsin \frac{2}{3} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$

Пример 8. Решить уравнение

$$\sin 2x = \frac{3}{7}(\sin 3x - \sin x)$$

Решение. Решение задачи основывается на использовании формул «Синус двойного угла» и «Разность синусов»:

$$\sin 2x = \frac{3}{7}(\sin 3x - \sin x) \Leftrightarrow \sin 2x - \frac{3}{7}(\sin 3x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin 2x - \frac{6}{7} \sin 2x \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x \left(1 - \frac{6}{7} \cos x \right) = 0$$

Возникают два случая:

1. $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \pi k, k \in Z \Leftrightarrow x = \frac{\pi k}{2}, k \in Z$

2. $1 - \frac{6}{7} \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{7}{6}$. В этом случае уравнение решений не имеет.

Ответ. $\frac{\pi k}{2}, k \in Z$

Пример 9. Решить уравнение

$$\sin 3x \cos x - \sin x \cos 3x = \sin 7x + \sin 5x$$

Решение. Решение задачи использует три формулы: «Синус разности», «Сумма синусов», «Разность синусов»:

$$\sin 3x \cos x - \sin x \cos 3x = \sin 7x + \sin 5x \Leftrightarrow \sin 2x = 2 \sin 6x \cos x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x - 2 \sin 6x \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x (\sin x - \sin 6x) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -2 \cos x \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{7x}{2} = 0$$

Возникают три случая:

$$1. \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$$

$$2. \sin \frac{5x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{5x}{2} = \pi k, k \in Z \Leftrightarrow x = \frac{2}{5} \pi k, k \in Z$$

$$3. \cos \frac{7x}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{7x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{7} + \frac{2}{7} \pi k, k \in Z$$

Ответ. $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, \frac{2}{5} \pi k, k \in Z, \frac{\pi}{7} + \frac{2}{7} \pi k, k \in Z$

Пример 10. Решить уравнение

$$\cos 4x + \cos 2x = \cos 12x + \cos 10x$$

Решение. Воспользовавшись формулами «Сумма косинусов» и «Разность косинусов», получаем:

$$\begin{aligned} \cos 4x + \cos 2x = \cos 12x + \cos 10x &\Leftrightarrow 2 \cos 3x \cos x = 2 \cos 11x \cos x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos 3x \cos x - \cos 11x \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x (\cos 3x - \cos 11x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 \cos x \sin 7x \sin 4x = 0 \end{aligned}$$

Возникают три случая:

$$1. \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$$

$$2. \sin 7x = 0 \Leftrightarrow 7x = \pi k, k \in Z \Leftrightarrow x = \frac{1}{7} \pi k, k \in Z$$

$$3. \sin 4x = 0 \Leftrightarrow 4x = \pi k, k \in Z \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \pi k, k \in Z$$

Ответ. $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, \frac{1}{7} \pi k, k \in Z, \frac{1}{4} \pi k, k \in Z$

Пример 11. Решить уравнение

$$\sin x = \sin 5x$$

Решение. Воспользуемся формулой «Разность синусов»:

$$\sin x = \sin 5x \Leftrightarrow \sin 5x - \sin x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin 2x \cos 3x = 0$$

Возникают два случая:

1.

$$\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

2.

$$\cos 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ. $\frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Пример 12. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x$$

Решение. Решение задачи основано на использовании свойств функции

$y = \operatorname{tg} x$:

$$\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = x + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 3x \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{2}\pi k \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{2}\pi k \neq \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 1 + 2n, n \in \mathbb{Z} \\ 3k \neq 1 + 2m, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x = \pi s, s \in \mathbb{Z}$$

Ответ. $\pi s, s \in \mathbb{Z}$

Пример 13. Решить уравнение

$$1 - 6 \cos 2x = \sqrt{1 - 2 \sin^2 x}$$

Решение. Решение задачи основывается на применении формулы «Косинус двойного угла», с помощью которой исходное уравнение сводится к квадратному уравнению относительно функции $\sqrt{\cos 2x}$:

$$\begin{aligned}
 1 - 6 \cos 2x &= \sqrt{1 - 2 \sin^2 x} \Leftrightarrow 1 - 6 \cos 2x = \sqrt{\cos 2x} \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow 6 \cos 2x + \sqrt{\cos 2x} - 1 &= 0 \Leftrightarrow 6(\sqrt{\cos 2x})^2 + \sqrt{\cos 2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow (\sqrt{\cos 2x})_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{12} = \frac{-1 \pm 5}{12}
 \end{aligned}$$

Возникают два случая:

1.

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\cos 2x} = \frac{1}{3} &\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{9} \Leftrightarrow 2x = 2\pi k \pm \arccos \frac{1}{9}, k \in Z \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow x &= \pi k \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{9}, k \in Z
 \end{aligned}$$

2.

$$\sqrt{\cos 2x} = -\frac{1}{2}. \text{ В этом случае уравнение решений не имеет.}$$

Ответ. $\pi k \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{9}, k \in Z$

Пример 14. Решить уравнение

$$\sqrt{\cos 2x} = \frac{1}{3} - \sin x \quad (1)$$

Решение. Воспользовавшись формулой «Косинус двойного угла», перепишем уравнение (1) в виде:

$$\sqrt{1 - 2 \sin^2 x} = \frac{1}{3} - \sin x. \quad (2)$$

Если теперь совершить в уравнении (2) замену переменного по формуле:

$$y = \sin x, \quad -1 \leq y \leq 1, \quad (3)$$

то получается иррациональное уравнение

$$\sqrt{1 - 2y^2} = \frac{1}{3} - y. \quad (4)$$

Поскольку левая часть уравнения (4) неотрицательна, то и правая часть должна быть неотрицательной, следовательно, переменная y также должна удовлетворять неравенству:

$$\frac{1}{3} - y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq \frac{1}{3}.$$

Таким образом, переменная y должна быть заключена в пределах:

$$-1 \leq y \leq \frac{1}{3}. \quad (5)$$

Далее получаем:

$$\begin{aligned} \sqrt{1-2y^2} = \frac{1}{3} - y &\Rightarrow 1-2y^2 = \frac{1}{9} - \frac{2}{3}y + y^2 \Rightarrow 3y^2 - \frac{2}{3}y - \frac{8}{9} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 27y^2 - 6y - 8 = 0 \Rightarrow y_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36+864}}{54} = \frac{6 \pm 30}{54} \Rightarrow \\ &\Rightarrow y_1 = \frac{36}{54} = \frac{2}{3}, \quad y_2 = -\frac{24}{54} = -\frac{4}{9}. \end{aligned}$$

В силу (5) первый случай должен быть отброшен. Во втором случае получаем:

$$\sin x = -\frac{4}{9} \Leftrightarrow x = (-1)^{k+1} \arcsin \frac{4}{9} + \pi k, k \in Z$$

Ответ. $(-1)^{k+1} \arcsin \frac{4}{9} + \pi k, k \in Z$

Пример 15. Решить уравнение

$$\sqrt{\cos 2x + 2} = 1 + 4 \cos x \quad (6)$$

Решение. Воспользовавшись формулой «Косинус двойного угла», перепишем уравнение (6) в виде:

$$\sqrt{2 \cos^2 x + 1} = 1 + 4 \cos x \quad (7)$$

Если теперь совершить в уравнении (7) замену переменной по формуле:

$$y = \cos x, \quad -1 \leq y \leq 1, \quad (8)$$

то получается иррациональное уравнение

$$\sqrt{2y^2 + 1} = 1 + 4y. \quad (9)$$

Поскольку левая часть уравнения (9) неотрицательна, то и правая часть должна быть неотрицательной, следовательно, переменная y также должна удовлетворять неравенству:

$$1 + 4y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -\frac{1}{4}.$$

Таким образом, переменная y должна быть заключена в пределах:

$$-\frac{1}{4} \leq y \leq 1. \quad (10)$$

Далее получаем:

$$\begin{aligned} \sqrt{2y^2 + 1} = 1 + 4y &\Rightarrow 2y^2 + 1 = 1 + 8y + 16y^2 \Rightarrow 14y^2 + 8y = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 7y^2 + 4y = 0 \Rightarrow y(7y + 4) = 0 \Rightarrow y_1 = -\frac{4}{7}, y_2 = 0. \end{aligned}$$

В силу (10) первый случай должен быть отброшен. Во втором случае получаем:

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$$

Ответ. $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

Пример 16. Решить уравнение

$$\sqrt{6 + 3\operatorname{tg}x} = \operatorname{tg}x \sqrt{1 + 4\operatorname{ctg}x}$$

Решение. В результате замены переменной

$$y = \operatorname{tg}x, y > 0 \quad (11)$$

уравнение преобразуется к виду

$$\sqrt{6 + 3y} = y \sqrt{1 + \frac{4}{y}}$$

Далее получаем:

$$\begin{aligned} \sqrt{6 + 3y} = y \sqrt{1 + \frac{4}{y}} &\Rightarrow 6 + 3y = y^2 \left(1 + \frac{4}{y}\right) \Rightarrow 6 + 3y = y^2 + 4y \Rightarrow \\ &\Rightarrow y^2 + y - 6 = 0 \Rightarrow (y + 3)(y - 2) = 0 \Rightarrow y_1 = -3, y_2 = 2. \end{aligned}$$

В силу (11) первый случай должен быть отброшен. Во втором случае получаем:

$$\operatorname{tg}x = 2 \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k, k \in Z$$

Ответ. $\operatorname{arctg} 2 + \pi k, k \in Z$

Пример 17. Решить уравнение

$$15 \operatorname{ctg} x = 4 \sin x$$

Решение. Решение задачи основано на использовании свойств функции $\operatorname{ctg} x$ и применении «Основного тригонометрического тождества»:

$$\begin{aligned} 15 \operatorname{ctg} x = 4 \sin x &\Rightarrow \frac{15 \cos x}{\sin x} - 4 \sin x = 0 \Rightarrow \frac{15 \cos x - 4 \sin^2 x}{\sin x} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{15 \cos x - 4(1 - \cos^2 x)}{\sin x} = 0 \Rightarrow \frac{4 \cos^2 x + 15 \cos x - 4}{\sin x} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} 4 \cos^2 x + 15 \cos x - 4 = 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\cos x)_{1,2} = \frac{-15 \pm \sqrt{225 + 64}}{4} \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} (\cos x)_{1,2} = \frac{-15 \pm 17}{4} \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow (\cos x)_1 = -8, (\cos x)_2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

В первом случае уравнение решений не имеет. Во втором случае получаем:

$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2\pi k \pm \frac{\pi}{3}, k \in Z$$

Ответ. $2\pi k \pm \frac{\pi}{3}, k \in Z$

Пример 18. Решить уравнение

$$\frac{1}{2} \operatorname{ctg} x + \frac{5}{3 \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$$

Решение. Решение задачи основано на использовании свойств функции $\operatorname{ctg} x$ и применении «Основного тригонометрического тождества».

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \operatorname{ctg} x + \frac{5}{3 \cos x} &= \frac{2}{\sin 2x} \Rightarrow \frac{1 \cos x}{2 \sin x} + \frac{5}{3 \cos x} = \frac{2}{2 \sin x \cos x} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{3 \cos^2 x + 10 \sin x - 6}{6 \sin x \cos x} &= 0 \Rightarrow \frac{3(1 - \sin^2 x) + 10 \sin x - 6}{\sin x \cos x} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{3 - 3 \sin^2 x + 10 \sin x - 6}{\sin x \cos x} &= 0 \Rightarrow \frac{3 \sin^2 x - 10 \sin x + 3}{\sin x \cos x} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} (\sin x)_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{6} \\ \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} &\Rightarrow (\sin x)_1 = 3, (\sin x)_2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

В первом случае уравнение решений не имеет. Во втором случае получаем:

$$\sin x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ. $(-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

Пример 19. Решить уравнение

$$-\frac{7}{6} \operatorname{tg} 2x = \cos x$$

Решение. Решение задачи использует формулы «Синус двойного угла» и «Косинус двойного угла».

$$\begin{aligned} -\frac{7}{6} \operatorname{tg} 2x = \cos x &\Leftrightarrow -\frac{7 \sin 2x}{6 \cos 2x} - \cos x = 0 \Leftrightarrow \frac{7 \sin 2x + 6 \cos x \cos 2x}{\cos 2x} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{14 \sin x \cos x + 6 \cos x \cos 2x}{\cos 2x} &= 0 \Leftrightarrow \frac{\cos x (7 \sin x + 3 \cos 2x)}{\cos 2x} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\cos x (7 \sin x + 3 - 6 \sin^2 x)}{\cos 2x} &= 0 \Leftrightarrow \frac{\cos x (6 \sin^2 x - 7 \sin x - 3)}{\cos 2x} = 0 \end{aligned}$$

Возникают два случая:

1.

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2 \cos^2 x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

2.

$$\begin{cases} 6\sin^2 x - 7\sin x - 3 = 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\sin^2 x - 7\sin x - 3 = 0 \\ 1 - 2\sin^2 x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sin x)_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 72}}{12} \\ 2\sin^2 x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (\sin x)_{1,2} = \frac{7 \pm 11}{12} \\ 2\sin^2 x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sin x)_1 = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \\ 2\sin^2 x \neq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} (\sin x)_2 = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3} \\ 2\sin^2 x \neq 1 \end{cases}$$

В первом случае уравнение решений не имеет. Во втором случае получаем:

$$\begin{cases} \sin x = -\frac{1}{3} \\ 2\sin^2 x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = (-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{3} + \pi k, k \in Z$$

Ответ. $(-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{3} + \pi k, k \in Z$

Пример 20. Решить уравнение

$$(1 + \cos x) \operatorname{ctg} x = 2 \sin 2x$$

Решение.

$$\begin{aligned} (1 + \cos x) \operatorname{ctg} x = 2 \sin 2x &\Leftrightarrow \frac{(1 + \cos x) \cos x}{\sin x} - 4 \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\cos x + \cos^2 x - 4 \sin^2 x \cos x}{\sin x} = 0 &\Leftrightarrow \frac{\cos x + \cos^2 x - 4(1 - \cos^2 x) \cos x}{\sin x} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{4 \cos^3 x + \cos^2 x - 3 \cos x}{\sin x} = 0 &\Leftrightarrow \frac{\cos x (4 \cos^2 x + \cos x - 3)}{\sin x} = 0 \end{aligned}$$

Возникают два случая:

$$1. \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$$

$$2. \begin{cases} 4\cos^2 x + \cos x - 3 = 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\cos x)_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{8} \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\cos x)_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{8} \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\cos x)_1 = -1 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} (\cos x)_2 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$$

Система

$$\begin{cases} \cos x = -1 \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$$

решений не имеет.

Решением системы

$$\begin{cases} \cos x = \frac{3}{4} \\ \sin x \neq 0 \end{cases}$$

являются числа:

$$x = 2\pi k \pm \arccos \frac{3}{4}, k \in Z$$

Ответ. $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z; 2\pi k \pm \arccos \frac{3}{4}, k \in Z$

Пример 21. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\cos x}$$

Решение.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\cos x} &\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin^2 x - \cos^2 x - \sin x}{\sin x \cos x} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\sin^2 x - (1 - \sin^2 x) - \sin x}{\sin x \cos x} = 0 \Leftrightarrow \frac{2\sin^2 x - \sin x - 1}{\sin x \cos x} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sin x)_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \\ \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sin x)_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4} \\ \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (\sin x)_1 = 1 \\ \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} (\sin x)_2 = -\frac{1}{2} \\ \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

В первом случае система решений не имеет. Во втором случае получаем:

$$\begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2} \\ \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$$

Ответ. $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$

Следующие два примера решаются с помощью формул приведения.

Пример 22. Решить уравнение

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(4x + 3\pi)$$

Решение.

$$\begin{aligned} \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(4x + 3\pi) &\Leftrightarrow \sin 2x = -\sin 4x \Leftrightarrow \sin 2x + \sin 4x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2 \sin 3x \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = 0 \cup \cos x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \pi k, k \in Z, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \end{aligned}$$

Ответ. $\frac{1}{3} \pi k, k \in Z; \quad \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

Пример 23. Решить уравнение

$$\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = 4 \cos\left(\frac{7\pi}{4} - x\right)$$

Решение. Поскольку

$$\begin{aligned} \cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) &= -\sin x, \\ \cos\left(\frac{7\pi}{4} - x\right) &= \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4} - x\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \\ &= \cos \frac{\pi}{4} \cos x - \sin \frac{\pi}{4} \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos x - \sin x), \end{aligned}$$

то исходное уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} = \frac{4}{\sqrt{2}}(\cos x - \sin x) &\Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} - 2\sqrt{2}(\cos x - \sin x) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\sin x - \cos x}{\cos x \sin x} + 2\sqrt{2}(\sin x - \cos x) = 0 &\Leftrightarrow (\sin x - \cos x) \left(\frac{1}{\cos x \sin x} + 2\sqrt{2} \right) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\sin x - \cos x) \left(\frac{1 + 2\sqrt{2} \cos x \sin x}{\cos x \sin x} \right) = 0 \end{aligned}$$

В результате возникают два случая.

1.

$$\begin{cases} \sin x - \cos x = 0 \\ \sin x \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \cos x \\ \sin x \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin x}{\cos x} = 1 \\ \sin x \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{1 + 2\sqrt{2} \cos x \sin x}{\cos x \sin x} = 0 &\Leftrightarrow \frac{1 + \sqrt{2} \sin 2x}{\sin 2x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{1}{\sqrt{2}} &\Leftrightarrow 2x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z \Leftrightarrow x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \pi k, k \in Z \end{aligned}$$

Ответ. $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z; \quad (-1)^{k+1} \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$

Пример 24. Решить уравнение

$$|\cos x| = \cos x - \frac{15}{2} \operatorname{tg} x$$

Решение. Рассмотрим, сначала, случай $\cos x > 0$. Тогда $|\cos x| = \cos x$ и уравнение принимает вид

$$\begin{cases} -\frac{15}{2} \operatorname{tg} x = 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, k \in Z \\ \cos x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2\pi n, n \in Z$$

Теперь рассмотрим случай $\cos x < 0$. Тогда $|\cos x| = -\cos x$ и исходное уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} \begin{cases} -\cos x = \cos x - \frac{15}{2} \operatorname{tg} x \\ \cos x < 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos x - \frac{15 \sin x}{2 \cos x} = 0 \\ \cos x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \cos^2 x - 15 \sin x = 0 \\ \cos x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4(1 - \sin^2 x) - 15 \sin x = 0 \\ \cos x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 4 \sin^2 x - 15 \sin x = 0 \\ \cos x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4 \sin^2 x + 15 \sin x - 4 = 0 \\ \cos x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sin x)_{1,2} = \frac{-15 \pm \sqrt{225 + 64}}{8} \\ \cos x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (\sin x)_{1,2} = \frac{-15 \pm 17}{8} \\ \cos x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sin x)_1 = -4 \\ \cos x < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} (\sin x)_2 = \frac{1}{4} \\ \cos x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Первая система решений не имеет. Во втором случае получаем

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{4} \\ \cos x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\arcsin \frac{1}{4} + 2\pi k + \pi, k \in Z$$

Ответ. $-\arcsin \frac{1}{4} + 2\pi k + \pi, k \in Z$

Пример 25. Решить уравнение

$$|\operatorname{tg} x| = \operatorname{tg} x + \frac{4}{3} \cos x$$

Решение. Рассмотрим, сначала, случай $\operatorname{tg} x \geq 0$. Тогда $|\operatorname{tg} x| = \operatorname{tg} x$ и уравнение принимает вид

$$\cos x = 0,$$

что невозможно, т.к. при этом не существует $\operatorname{tg} x$

Теперь рассмотрим случай $\operatorname{tg} x < 0$. Тогда $|\operatorname{tg} x| = -\operatorname{tg} x$ и исходное уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x + \frac{4}{3} \cos x \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\operatorname{tg} x + \frac{4}{3} \cos x = 0 \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{2}{3} \cos x = 0 \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3\sin x + 2\cos x}{\cos x} = 0 \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sin x + 2\cos x = 0 \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sin x = -2\cos x \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = -\frac{2}{3} \\ \operatorname{tg} x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow x = -\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ответ. $-\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить уравнения:

1. $\sqrt{2\cos^2 x - 1} = 1 - 12\cos 2x$

2. $\frac{2\sin x}{\cos x - \cos 3x} - \frac{7}{3} = 2\sin 2x$

3. $\sqrt{3\sin^2 x - 2} = 2\cos x - \frac{1}{2}$

4. $\sqrt{\operatorname{ctg} x + 12} = \operatorname{ctg} x \sqrt{1 + 2\operatorname{tg} x}$

5. $10\operatorname{ctg}^2 x = \frac{9}{\sin x} - 1$

6. $8\operatorname{tg} x = 3\cos x$

7. $\frac{3}{2\cos x} = \operatorname{tg}^2 x$

8. $\frac{4}{\cos x} = 4\operatorname{tg} x + 3\cos x$

9. $\operatorname{tg} x + \frac{13}{6\sin x} = \frac{4}{\sin 2x}$

10. $5\sin x = \frac{6}{\sin x} - 6\operatorname{ctg} x$

11. $7\operatorname{tg} 2x = 4\sin x$

12. $(1 + \sin x) \operatorname{tg} x = 3 \sin 2x$

13. $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sin x}$

14. $\sin 2x = \frac{2}{7}(\cos 3x - \cos x)$

15. $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3}$

16. $\cos^2 x = \frac{1}{2}$

17. $\operatorname{ctg}^2 x = 3$

18. $5 \sin x + 2 \sin 2x = 0$

19. $4 \sin \frac{x}{2} + \cos x - 1 = 0$

20. $3 \cos x + \sin 2x = 0$

21. $2 \cos^2 x - \cos x = \sin x - \sin 2x$

22. $6 \cos 2x \cdot \cos x = 1 - 2 \sin^2 x$

23. $\sin 2x - 4 \sin^2 x = 2 \sin x - \cos x$

24. $5 \cos 2x \cdot \sin x = 2 \cos^2 x - 1$

25. $\cos x - \sin x = 4 \cos^2 x - 2 \sin 2x$

26. $4 \sin 2x + 4 \sin x = 2 \cos x + 1$

27. $3 \sin 2x + \cos x = 6 \sin x + 1$

28. $\sin\left(3x - \frac{5\pi}{2}\right) = \sin(6x - 3\pi)$

29. $\sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

30. $\sqrt{3} \cos 4\left(3x + \frac{7\pi}{2}\right) = \sin(8x - 5\pi)$

31. $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = 4 \sin\left(x + \frac{5\pi}{4}\right)$

$$32. \sin(2x - 7\pi) = \sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$33. \cos\left(2x + \frac{5\pi}{2}\right) = \cos x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

$$34. |\sin x| = \sin x - \frac{16}{3} \operatorname{ctgx}$$

$$35. |\operatorname{ctgx}| = \operatorname{ctgx} - \frac{4}{3} \sin x$$

$$36. \sin 2x \cos 8x + \cos 2x \sin 8x = \sin 7x - \sin 3x$$

$$37. \cos 5x - \cos x = \cos 12x - \cos 8x$$

$$38. \sin 2x = \sqrt{3} \sin x$$

$$39. \sin 2x = \sqrt{2} \cos x$$

$$40. \sin 2x = 2 - 2 \cos^2 x$$

$$41. \operatorname{ctg} 3x = \operatorname{ctg} 5x$$

$$42. \cos 2x = \cos 6x$$

$$43. \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 1 - \cos x$$

$$44. \frac{\sin 2x}{1 - \cos x} = 2 \sin x$$

$$45. \sqrt{4 \cos^2 x - 3} = 4 \sin x - 1$$

$$46. \sqrt{\cos 2x} = 1 + 2 \sin x$$

$$47. \sqrt{3 \sin^2 x - 2} = 3 \cos x - 1$$