

Учебный центр «Резольвента»

Доктор физико-математических наук, профессор

К. Л. САМАРОВ

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Учебно-методическое пособие для подготовки
к ЕГЭ и ГИА по математике

© К. Л. Самаров, 2010

© ООО «Резольвента», 2010

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy = 8, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{aligned} \begin{cases} xy = 8, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 8, \\ \frac{y-x}{xy} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 8, \\ \frac{y-x}{8} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 8, \\ y-x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+2) = 8, \\ y = x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 8 = 0, \\ y = x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)(x-2) = 0, \\ y = x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 = 0, \\ y = x+2 \end{cases} \cup \begin{cases} x-2 = 0, \\ y = x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4, \\ y = -2 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 2, \\ y = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ. $(-4, -2); (2, 4)$

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = 6, \\ x^3 - y^3 = 126 \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - y = 6, \\ x^3 - y^3 = 126 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 6, \\ (y + 6)^3 - y^3 = 126 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 6, \\ y^3 + 18y^2 + 108y + 216 - y^3 = 126 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 6, \\ 18y^2 + 108y + 90 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 6, \\ y^2 + 6y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 6, \\ (y + 5)(y + 1) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 6, \\ y + 5 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = y + 6, \\ y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = -5 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 5, \\ y = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ. $(1, -5); (5, -1)$

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{1}{6}, \\ \frac{1}{x} + y = 5 \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{1}{6}, \\ \frac{1}{x} + y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x = y, \\ 1 + xy = 5x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6x, \\ 1 + x \cdot 6x = 5x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6x, \\ 6x^2 - 5x + 1 = 0 \end{cases}$$

Далее получаем:

$$6x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{12} = \frac{5 \pm 1}{12} \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{1}{2}$$

Следовательно,

$$y_1 = 6x_1 = \frac{6}{3} = 2, y_2 = 6x_2 = \frac{6}{2} = 3$$

Ответ. $\left(\frac{1}{3}, 2\right); \left(\frac{1}{2}, 3\right)$

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{2x-y} + y = -5, \\ \frac{y}{2x-y} = 6 \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{1}{2x-y} + y = -5, \\ \frac{y}{2x-y} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2x-y} = -y-5, \\ \frac{y}{2x-y} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2x-y} = -y-5, \\ y(-y-5) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2x-y} = -y-5, \\ y^2 + 5y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2x-y} = -y-5, \\ (y+2)(y+3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2x-y} = -y-5, \\ y = -2 \end{cases} \cup \\ & \cup \begin{cases} \frac{1}{2x-y} = -y-5, \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2x+2} = -3, \\ y = -2 \end{cases} \cup \begin{cases} \frac{1}{2x+3} = -2, \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -6x - 6, \\ y = -2 \end{cases} \cup \begin{cases} 1 = -4x - 6, \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = -7, \\ y = -2 \end{cases} \cup \begin{cases} 4x = -7, \\ y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{6}, \\ y = -2 \end{cases} \cup \begin{cases} x = -\frac{7}{4}, \\ y = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ. $\left(-\frac{7}{6}, -2\right); \left(-\frac{7}{4}, -3\right)$

Пример 5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x\sqrt{x+y} = 14, \\ y\sqrt{x+y} = 13 \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x\sqrt{x+y} = 14, \\ y\sqrt{x+y} = 13 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y} = \frac{14}{x}, \\ y\sqrt{x+y} = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y} = \frac{14}{x}, \\ y \cdot \frac{14}{x} = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y} = \frac{14}{x}, \\ y = \frac{13x}{14} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x + \frac{13x}{14}} = \frac{14}{x}, \\ y = \frac{13x}{14} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{27x}{14}} = \frac{14}{x}, \\ y = \frac{13x}{14} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{27x}{14} = \frac{14^2}{x^2}, \\ y = \frac{13x}{14} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 27x^3 = 14^3, \\ y = \frac{13x}{14} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} 3x = 14, \\ y = \frac{13x}{14} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{14}{3}, \\ y = \frac{13x}{14} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{14}{3}, \\ y = \frac{13}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Простая проверка показывает, что найденные числа являются решением исходной системы уравнений.

Ответ. $\left(\frac{14}{3}, \frac{13}{3}\right)$

Пример 6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17, \\ x^2 - 2xy = -3 \end{cases}$$

Решение. Сложив первое уравнение системы, умноженное на 3, со вторым уравнением системы, умноженным на 17, получим:

$$\begin{aligned} 3(x^2 + 2y^2) + 17(x^2 - 2xy) &= 17 \cdot 3 + (-3) \cdot 17 \Leftrightarrow 20x^2 - 34xy + 6y^2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 10x^2 - 17xy + 3y^2 = 0 &\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{17y \pm \sqrt{289y^2 - 120y^2}}{20} = \frac{17y \pm \sqrt{169y^2}}{20} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{17y \pm 13y}{20} &\Leftrightarrow x_1 = \frac{4y}{20} = \frac{y}{5}, x_2 = \frac{30y}{20} = \frac{3y}{2} \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим первый случай:

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 &= \left(\frac{y}{5}\right)^2 + 2y^2 = y^2 \left(\frac{1}{25} + 2\right) = y^2 \frac{51}{25} = 17 \Leftrightarrow y^2 = \frac{25}{3} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y &= \pm \frac{5}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{y}{5} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Рассмотрим второй случай:

$$x^2 + 2y^2 = \left(\frac{3y}{2}\right)^2 + 2y^2 = y^2\left(\frac{9}{4} + 2\right) = y^2 \frac{17}{4} = 17 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y = \pm 2 \Rightarrow x = \frac{3y}{2} = \pm 3$$

Ответ. $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{5}{\sqrt{3}}\right), (\pm 3, \pm 2)$

Пример 7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 4y + 4z = 6, \\ 4x + 3y + 4z = 8, \\ 4x + 4y + 3z = -3 \end{cases}$$

Решение. Сложив все три уравнения системы, получим:

$$11x + 11y + 11z = 11 \Rightarrow x + y + z = 1 \Rightarrow 4x + 4y + 4z = 4.$$

Теперь остается лишь поочередно вычесть из полученного уравнения каждое из уравнений исходной системы:

$$4x + 4y + 4z - (3x + 4y + 4z) = 4 - 6 \Rightarrow x = -2,$$

$$4x + 4y + 4z - (4x + 3y + 4z) = 4 - 8 \Rightarrow y = -4,$$

$$4x + 4y + 4z - (4x + 4y + 3z) = 4 - (-3) \Rightarrow z = 7$$

Ответ. $x = -2, y = -4, z = 7$

Пример 8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 y^2 z^2 = \frac{1}{2}, \\ x^2 y^3 z^2 = \frac{1}{4}, \\ x^2 y^2 z^3 = \frac{1}{16} \end{cases}$$

Решение. Перемножив все три уравнения системы, получим:

$$x^7 y^7 z^7 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^7 \Rightarrow xyz = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 y^2 z^2 = \frac{1}{4}$$

Теперь остается лишь поочередно разделить каждое из уравнений исходной системы на полученное уравнение:

$$\frac{x^3 y^2 z^2}{x^2 y^2 z^2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)} \Rightarrow x = 2, \quad \frac{x^2 y^3 z^2}{x^2 y^2 z^2} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)} \Rightarrow y = 1, \quad \frac{x^2 y^2 z^3}{x^2 y^2 z^2} = \frac{\left(\frac{1}{16}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)} \Rightarrow z = \frac{1}{4}$$

Ответ. $x = 2, y = 1, z = \frac{1}{4}$

Пример 9. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} ax + y = 3, \\ x + ay = 3 \end{cases}$$

- А. имеет единственное решение?
- В. имеет бесконечно много решений?
- С. не имеет решений?

Решение. Преобразуем исходную систему уравнений к более удобному для проведения исследования виду:

$$\begin{aligned} \begin{cases} ax + y = 3, \\ x + ay = 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - ax, \\ x + a(3 - ax) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - ax, \\ x + 3a - a^2 x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - ax, \\ x(1 - a^2) = 3(1 - a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - ax, \\ x(1 - a)(1 + a) = 3(1 - a) \end{cases} \end{aligned}$$

Рассмотрим первый случай: $a \neq 1, a \neq -1$. В этом случае

$$\begin{cases} y = 3 - ax, \\ x(1 - a)(1 + a) = 3(1 - a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - ax, \\ x = \frac{3}{1 + a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - \frac{3a}{1 + a} = \frac{3}{1 + a}, \\ x = \frac{3}{1 + a}, \end{cases}$$

т.е. система уравнений имеет единственное решение.

Рассмотрим второй случай: $a = 1$. В этом случае

$$\begin{cases} y = 3 - ax, \\ x(1 - a)(1 + a) = 3(1 - a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - x, \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 - t, \\ x = t, \end{cases} \quad t \in (-\infty, +\infty)$$

т.е. система уравнений имеет бесконечно много решений.

Рассмотрим третий случай: $a = -1$. В этом случае

$$\begin{cases} y = 3 - ax, \\ x(1-a)(1+a) = 3(1-a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 + x, \\ 0 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset$$

т.е. система уравнений решений не имеет.

Ответ: При $a \neq 1, a \neq -1$ система уравнений имеет единственное решение, при $a = 1$ система уравнений имеет бесконечно много решений, при $a = -1$ система уравнений не имеет решений.

Пример 10. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 5, \\ 2\log_4 x + \log_2 y = 4 \end{cases}$$

Решение. Заметив, что область определения системы уравнений имеет вид $\{x > 0, y > 0\}$, получаем

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 5, \\ 2\log_4 x + \log_2 y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 32, \\ 2\log_{2^2} x + \log_2 y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 32, \\ \log_2 x + \log_2 y = 4 \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 32, \\ \log_2 xy = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 32, \\ xy = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 32, \\ y = \frac{16}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{256}{x^2} = 32, \\ y = \frac{16}{x} \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} x^4 - 32x^2 + 256 = 0, \\ y = \frac{16}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x^2 - 16)^2 = 0, \\ y = \frac{16}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 16, \\ y = \frac{16}{x} \end{cases} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases} \cup \begin{cases} x = -4 \\ y = -4 \end{cases} \end{aligned}$$

Отбрасывая отрицательные решения, получаем ответ задачи.

Ответ. (4; 4)

Пример 11. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^{x^2+y^2} = 81, \\ \log_2 x + 2\log_4 y = 1 \end{cases}$$

Решение. Заметив, что область определения системы уравнений имеет вид $\{x > 0, y > 0\}$, получаем

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3^{x^2+y^2} = 81, \\ \log_2 x + 2\log_4 y = 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 3^{x^2+y^2} = 3^4, \\ \log_2 x + \log_2 y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ \log_2 xy = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ xy = 2 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} x^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 4, \\ y = \frac{2}{x} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x^4 - 4x^2 + 4 = 0, \\ y = \frac{2}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x^2 - 2)^2 = 0, \\ y = \frac{2}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2 = 0, \\ y = \frac{2}{x} \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}, \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \cup \begin{cases} x = -\sqrt{2}, \\ y = -\sqrt{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Отбрасывая отрицательные решения, получаем ответ задачи.

Ответ. $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$

Пример 12. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2^{y+1} = 3, \\ 4x + 4^y = 32 \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 2^{y+1} = 3, \\ 4x + 4^y = 32 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \cdot 2^y = 3, \\ 4x + (2^y)^2 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^y = \frac{3-x}{2} \\ 4x + \left(\frac{3-x}{2}\right)^2 = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2^y = \frac{3-x}{2} \\ 4x + \frac{9-6x+x^2}{4} = 32 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2^y = \frac{3-x}{2} \\ 16x + 9 - 6x + x^2 = 128 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2^y = \frac{3-x}{2} \\ x^2 + 10x - 119 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2^y = \frac{3-x}{2} \\ x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 476}}{2} = \frac{-10 \pm 24}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2^y = \frac{3-x}{2} \\ x = -17 \end{cases} \cup \begin{cases} 2^y = \frac{3-x}{2} \\ x = 7 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2^y = 10 \\ x = -17 \end{cases} \cup \begin{cases} 2^y = -2 \\ x = 7 \end{cases} \end{aligned}$$

Поскольку $2^y > 0$, то вторая система уравнений решений не имеет. В первом случае получаем:

$$\begin{cases} 2^y = 10 \\ x = -17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -17 \\ y = \log_2 10 \end{cases}$$

Ответ. $\begin{cases} x = -17 \\ y = \log_2 10 \end{cases}$

Пример 13. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{y} + \lg x^2 = 2, \\ y + 4 \lg x = 28 \end{cases}$$

Решение. Заметив, что область определения системы уравнений имеет вид $\{x > 0, y \geq 0\}$, получаем

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sqrt{y} + \lg x^2 = 2, \\ y + 4 \lg x = 28 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{y} + 2 \lg x = 2, \\ y + 4 \lg x = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lg x = \frac{2 - \sqrt{y}}{2}, \\ y + 4 \left(\frac{2 - \sqrt{y}}{2} \right) = 28 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \lg x = \frac{2 - \sqrt{y}}{2}, \\ y + 4 - 2\sqrt{y} - 28 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \lg x = \frac{2 - \sqrt{y}}{2}, \\ y - 2\sqrt{y} - 24 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lg x = \frac{2 - \sqrt{y}}{2}, \\ (\sqrt{y})_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 96}}{2} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \lg x = \frac{2 - \sqrt{y}}{2}, \\ (\sqrt{y})_{1,2} = \frac{2 \pm 10}{2} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \lg x = \frac{2 - \sqrt{y}}{2}, \\ (\sqrt{y})_1 = 6 \end{cases} \cup \begin{cases} \lg x = \frac{2 - \sqrt{y}}{2}, \\ (\sqrt{y})_1 = -4 \end{cases} \end{aligned}$$

Поскольку \sqrt{y} является неотрицательным числом, то второй случай должен быть отброшен. В первом случае получаем:

$$\begin{cases} \lg x = \frac{2 - \sqrt{y}}{2}, \\ (\sqrt{y}) = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lg x = \frac{2 - 6}{2}, \\ (\sqrt{y}) = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lg x = -2, \\ y = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{100}, \\ y = 36 \end{cases}$$

Ответ. $\begin{cases} x = \frac{1}{100}, \\ y = 36 \end{cases}$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить системы уравнений

1. $\begin{cases} x + y = 7, \\ (x^2 - y^2)(x - y) = 175 \end{cases}$

2. $\begin{cases} xy = 2, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2} \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + y = 5, \\ x^3 + y^3 = 215 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \frac{x}{y} = 2, \\ \frac{1}{x} - y = \frac{7}{4} \end{cases}$

5. $\begin{cases} x - y = 3, \\ (x^2 - y^2)(x + y) = 147 \end{cases}$

6. $\begin{cases} \frac{1}{x + y} + x = -1, \\ \frac{x}{x + y} = -2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} \frac{1}{x - y} + x = 1, \\ \frac{x}{x - y} = -2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} \frac{1}{x + 2y} + y = 2, \\ \frac{y}{x + 2y} = -3 \end{cases}$

$$9. \begin{cases} x(x+y) = 34, \\ y(x+y) = 15 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x\sqrt{x^2+y^2} = 2\sqrt{3}, \\ y\sqrt{x^2+y^2} = 2 \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \sqrt{x}(x+y) = 1, \\ \sqrt{y}(x+y) = \sqrt{7} \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x\sqrt{x-y} = 11, \\ y\sqrt{x-y} = 3 \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x(x-y) = 25, \\ y(x-y) = 16 \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} x\sqrt{x^2-y^2} = 5, \\ y\sqrt{x^2-y^2} = 4 \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} \sqrt{x}(x-y) = 3, \\ \sqrt{y}(x-y) = 1 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} \frac{x^5}{y^2 z^2} = \frac{1}{64}, \\ \frac{y^5}{x^2 z^2} = 1, \\ \frac{z^5}{x^2 y^2} = 64 \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 2x + 3y + 3z = -1, \\ 3x + 2y + 3z = 4, \\ 3x + 3y + 2z = 5 \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x^5 y^4 z^4 = 1000, \\ x^4 y^5 z^4 = 10000, \\ x^4 y^4 z^5 = 1000000 \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} \frac{x^3}{y^4 z^4} = \frac{1}{128}, \\ \frac{y^3}{x^4 z^4} = 128, \\ \frac{z^3}{x^4 y^4} = 1 \end{cases}$$

20. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} a^2 x + y = 1, \\ x + y = a \end{cases}$$

- А. имеет единственное решение?
- В. имеет бесконечно много решений?
- С. не имеет решений?

21. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y = 1, \\ 2x + ay = -1 \end{cases}$$

- А. имеет единственное решение?
- В. имеет бесконечно много решений?
- С. не имеет решений?

22. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x + y = a, \\ 4x + a^2 y = 8 \end{cases}$$

- А. имеет единственное решение?
- В. имеет бесконечно много решений?
- С. не имеет решений?

Решить системы уравнений

$$23. \begin{cases} 3\log_{27} x + 2\log_9 y = 3\log_3 2, \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 4^{\log_2(x^2+y^2)} = 36, \\ \log_2 x + \log_2 y = \log_4 5 \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} y^2 = 4^x + 8, \\ 2^{x+1} + y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} y^2 = 4^x + 2, \\ 2^{x+2} + 2y + 1 = 0 \end{cases}$$