Учебный центр «Резольвента»

Кандидат физико-математических наук, доцент

С. С. САМАРОВА

МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

Учебно-методическое пособие для подготовки к ЕГЭ по математике

Пример 1. Составить уравнение прямой, параллельной прямой $y = 2x + 3$ и проходящей через точку $(1; 7)$.

Решение. Поскольку уравнения параллельных прямых имеют одинаковые угловые коэффициенты, то уравнение каждой прямой, параллельной прямой $y = 2x + 3$, может быть записано в виде $y = 2x + d$, где d — некоторое число. Так как параллельная прямая проходит через точку $(1; 7)$, то справедливо равенство $7 = 2 \cdot 1 + d$, из которого вытекает, что $d = 5$.

Ответ. $y = 2x + 5$

Пример 2. Составить уравнение прямой, перпендикулярной прямой $y=\frac{1}{2}x-1$ и проходящей через точку $(3;-5)$.

Решение. Поскольку любая прямая, перпендикулярная к прямой $y=kx+b$, имеет угловой коэффициент, равный $-\frac{1}{k}$, то уравнение каждой прямой, перпендикулярной у прямой $y=\frac{1}{2}x-1$, может быть записано в виде $y=-2x+d$, где d — некоторое число. Так как перпендикулярная прямая проходит через точку $(3;-5)$, то справедливо равенство $-5=-2\cdot 3+d$, из которого вытекает, что $d=1$.

Ответ. $y=-2x+1$

Пример 3. Найти координаты точки, лежащей на прямой $y=x$ и одинаково удаленной от точек $(3;1)$ и $(-2;4)$.

Решение. Координаты точки, лежащей на прямой $y=x$ и одинаково удаленной от точек $(3;1)$ и $(-2;4)$, удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} y=x, \\ \sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y-4)^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x, \\ (x-3)^2+(y-1)^2=(x+2)^2+(y-4)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x, \\ x^2-6x+9+y^2-2y+1=x^2+4x+4+y^2-8y+16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x, \\ -10x+6y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x, \\ -4x=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{5}{2} \\ y=-\frac{5}{2} \end{cases}$$

Ответ. $\left(-\frac{5}{2};-\frac{5}{2}\right)$

Пример 4. Найти координаты точек, лежащих на прямой $y=2x+2$ и удаленных от точки $(-6;5)$ на расстояние $5\sqrt{5}$.

Решение. Искомые координаты точек удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} y=2x+2, \\ \sqrt{(x+6)^2+(y-5)^2}=5\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+2, \\ (x+6)^2+(y-5)^2=125 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+2, \\ (x+6)^2+(2x-3)^2=125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+2, \\ x^2+12x+36+4x^2-12x+9=125 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+2, \\ 5x^2=80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+2, \\ x^2=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+2, \\ x=4 \end{cases} \cup \begin{cases} y=2x+2, \\ x=-4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=10 \end{cases} \cup \begin{cases} x=-4 \\ y=-6 \end{cases}$$

Ответ. $(4;10)$, $(-4;-6)$

Пример 5. Найти координаты точек, лежащих на параболе $y=x^2-4x+6$ и удаленных от прямой $y=-4$ на расстояние 7.

Решение. Искомые координаты точек удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} y=x^2-4x+6 \\ |y+4|=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2-4x+6 \\ y+4=7 \end{cases} \cup \begin{cases} y=x^2-4x+6 \\ y+4=-7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x^2-4x+6 \\ y=3 \end{cases} \cup \begin{cases} y=x^2-4x+6 \\ y=-11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+6=3 \\ y=3 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2-4x+6=-11 \\ y=-11 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+3=0 \\ y=3 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2-4x+17=0 \\ y=-11 \end{cases}$$

Поскольку уравнение $x^2-4x+17=0$ корней не имеет, а корнями уравнения $x^2-4x+3=0$ являются числа $x_1=1$, $x_2=3$, то искомые точки имеют координаты $(1;3)$ и $(3;3)$

Ответ. $(1;3)$, $(3;3)$.

Пример 6. Составить уравнения касательных к параболе $y = x^2 - 3x + 4$, проходящих через точку $(0; 3)$.

Решение. Во-первых, если прямая, заданная уравнением $y = kx + b$, проходит через точку $(0; 3)$, то выполняется равенство $3 = k \cdot 0 + b$ и уравнение прямой принимает вид $y = kx + 3$. Во-вторых, если прямая, заданная уравнением $y = kx + 3$, является касательной к параболе $y = x^2 - 3x + 4$, то уравнение

$$kx + 3 = x^2 - 3x + 4,$$

эквивалентное уравнению

$$x^2 - (3 + k)x + 1 = 0,$$

имеет два совпавших корня и дискриминант квадратного трехчлена равен нулю. Выписывая дискриминант квадратного трехчлена, получаем:

$$D = (3 + k)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (3 + k - 2)(3 + k + 2) = 0 \Leftrightarrow k_1 = -1, k_2 = -5.$$

Ответ. $y = -x + 3$, $y = -5x + 3$

Пример 7. Составить уравнение касательной к параболе $y = x^2 - 7x + 3$, параллельной прямой $y = 3 - 5x$.

Решение. Во-первых, если прямая, заданная уравнением $y = kx + b$, параллельна прямой $y = 3 - 5x$, то её уравнение имеет вид $y = -5x + b$, где b – любое число. Во-вторых, если прямая, заданная уравнением $y = -5x + b$, является касательной к параболе $y = x^2 - 7x + 3$, то уравнение

$$-5x + b = x^2 - 7x + 3,$$

эквивалентное уравнению

$$x^2 - 2x + 3 - b = 0,$$

имеет два совпавших корня и дискриминант квадратного трехчлена равен нулю. Выписывая дискриминант квадратного трехчлена, получаем:

$$D = 4 - 4(3 - b) = 0 \Leftrightarrow 4 - 12 + 4b = 0 \Leftrightarrow 4b = 8 \Leftrightarrow b = 2.$$

Ответ. $y = -5x + 2$.

Пример 8. Составить уравнение касательной к параболе $y = x^2 - 2x$, перпендикулярной прямой $y = x + 5$.

Решение. Во-первых, если прямая, заданная уравнением $y = kx + b$, перпендикулярна прямой $y = x + 5$, то её уравнение имеет вид $y = -x + b$, где b – любое число. Во-вторых, если прямая, заданная уравнением $y = -x + b$, является касательной к параболе $y = x^2 - 2x$, то уравнение

$$-x + b = x^2 - 2x,$$

эквивалентное уравнению

$$x^2 - x - b = 0,$$

имеет два совпавших корня и дискриминант квадратного трехчлена равен нулю. Выписывая дискриминант квадратного трехчлена, получаем:

$$D = 1 + 4b = 0 \Leftrightarrow 4b = -1 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{4}.$$

Ответ. $y = -x - \frac{1}{4}$.

Пример 9. Найти расстояние от точки $(0; -10)$ до вершины параболы

$$y = \frac{1}{3}x^2 + 2x - 3.$$

Решение. Найдем, сначала, координаты вершины параболы:

$$x_v = -\frac{2}{2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)} = -3;\ y_v = \frac{1}{3} \cdot (-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 3 = -6.$$

Теперь найдем требуемое расстояние между точками:

$$\sqrt{(0 - (-3))^2 + (-10 - (-6))^2} = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

Ответ. 5

Пример 10. Найти все значения параметра p, при которых расстояние между вершинами парабол

$$y = x^2 + 6px + 8p^2 - 1 \quad \text{и} \quad y = \frac{1}{5}x^2 + 2px + 3p^2$$

больше $\frac{5}{4}$.

Решение. Найдем, сначала, координаты вершины первой параболы:

$$x_v = -\frac{6p}{2} = -3p;\ y_v = (-3p)^2 + 6p(-3p) + 8p^2 - 1 = -p^2 - 1.$$

Теперь найдем координаты вершины второй параболы:

$$x_v = -\frac{2p}{2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)} = -5p;\ y_v = \frac{1}{5}\cdot(-5p)^2 + 2p\cdot(-5p) + 3p^2 = -2p^2.$$

Теперь найдем расстояние между вершинами двух парабол:

$$\sqrt{\left(-3p-(-5p)\right)^2 + \left(-p^2-1-\left(-2p^2\right)\right)^2} = \sqrt{4p^2 + \left(p^2-1\right)^2} = \sqrt{4p^2 + p^4 - 2p^2 + 1} =$$
$$= \sqrt{p^4 + 2p^2 + 1} = \sqrt{\left(p^2+1\right)^2} = \left|p^2+1\right| = p^2 + 1.$$

Далее получаем:

$$p^2 + 1 > \frac{5}{4} \Leftrightarrow p^2 > \frac{1}{4} \Leftrightarrow |p| > \frac{1}{2} \Leftrightarrow p \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

Ответ. $p \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Пример 11. Найти все значения параметра p, при которых вершина параболы

$$y = 5x^2 - 6px + \frac{4}{5}p + \frac{14}{5}p^2$$

лежит вне круга радиуса $\frac{5}{2}$ с центром в точке $\left(\frac{9}{5};\ p^2 - \frac{1}{10}\right)$.

Решение. Найдем, сначала, координаты вершины параболы:

$$x_v = \frac{6p}{10} = \frac{3p}{5};\ y_v = 5\cdot\left(\frac{3p}{5}\right)^2 - 6p\cdot\left(\frac{3p}{5}\right) + \frac{4}{5}p + \frac{14}{5}p^2 = p^2 + \frac{4}{5}p.$$

Теперь найдем расстояние от вершины параболы до центра круга:

$$\sqrt{\left(\frac{3p}{5}-\frac{9}{5}\right)^2+\left(p^2-\frac{1}{10}-\left(p^2+\frac{4}{5}p\right)\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{25}(p-3)^2+\left(\frac{4}{5}p+\frac{1}{10}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{36}{100}(p-3)^2+\frac{1}{100}(8p+1)^2}=\frac{1}{10}\sqrt{36(p-3)^2+(8p+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{10}\sqrt{36\left(p^2-6p+9\right)+64p^2+16p+1}=\frac{1}{10}\sqrt{100p^2-200p+325}$$

Далее получаем:

$$\frac{1}{10}\sqrt{100p^2-200p+325}>\frac{5}{2}\Leftrightarrow\sqrt{100p^2-200p+325}>25\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 100p^2-200p+325>625\Leftrightarrow 100p^2-200p-300>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2-2p-3>0\Leftrightarrow(p-3)(p+1)>0\Leftrightarrow p\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$$

Ответ. $p\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Составить уравнение прямой, параллельной прямой $y=-x+4$ и проходящей через точку $(2;-3)$.

2. Составить уравнение прямой, перпендикулярной прямой $y=-\frac{1}{3}x+5$ и проходящей через точку $(-1;-1)$.

3. Найти координаты точки, лежащей на прямой $y=-x$ и одинаково удаленной от точек $(-1;-2)$ и $(2;5)$.

4. Найти координаты точек, лежащих на прямой $y=-2x+5$ и удаленных от точки $(4;2)$ на расстояние 5.

5. Найти координаты точек, лежащих на параболе $y=x^2+6x+10$ и удаленных от прямой $y=-1$ на расстояние 6.

6. Найти координаты точек, лежащих на параболе $y=-x^2+8x-13$ и удаленных от прямой $y=11$ на расстояние 9.

7. Составить уравнения касательных к параболе $y = 2x^2 + 6x + 1$, проходящих через точку $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

8. Составить уравнение касательной к параболе $y = -x^2 + 5$, перпендикулярной прямой $y = \frac{1}{3}x$.

9. Составить уравнения касательных к параболе $y = x^2 - 2x + 14$, проходящих через точку $(0; -2)$.

10. Составить уравнение касательной к параболе $y = 4 - x^2$, параллельной прямой $y = 4x + 10$.

11. Составить уравнения касательных к параболе $y = 3x^2 - 2x + 2$, проходящих через точку $(1; 0)$.

12. Найти расстояние от точки $(1; -7)$ до вершины параболы

$$y = x^2 + 6x - 1.$$

13. Найти расстояние от точки $(14; -1)$ до вершины параболы

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 4.$$

14. Найти расстояние от точки $(-3; -11)$ до вершины параболы

$$y = x^2 - 4x + 5.$$

15. Найти все значения параметра p, при которых расстояние между вершинами парабол

$$y = x^2 + px - \frac{3}{8}p^2 \quad \text{и} \quad y = 2x^2 + 3px + 1$$

меньше $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

16. Найти все значения параметра p, при которых вершина параболы

$$y = px^2 - 2x + 1$$

лежит внутри круга радиуса 2 с центром в точке $\left(\frac{2}{p};\ 1-4p\right)$.

17. Найти все значения параметра p, при которых расстояние между вершинами парабол

$$y = x^2 + 2px + 4 + p^2 \quad \text{и} \quad y = x^2 - 6px + 10p^2$$

больше 5.

18. Найти все значения параметра p, при которых вершина параболы

$$y = 5x^2 + 4px + \frac{4}{5}p^2 + 3$$

лежит вне круга радиуса 4 с центром в точке $\left(p+1;\ -\frac{p}{5}\right)$.

19. Найти все значения параметра p, при которых расстояние между вершинами парабол

$$y = x^2 - px + p^2 - 1 \quad \text{и} \quad y = x^2 - 3px + 2p^2$$

меньше $\sqrt{13}$.

20. Найти все значения параметра p, при которых вершина параболы

$$y = px^2 - 6x + p$$

лежит внутри круга радиуса 1 с центром в точке $\left(\frac{3}{p} - p;\ -\frac{8}{p}\right)$.