Учебный центр «Резольвента»

Кандидат физико-математических наук, доцент

С. С. САМАРОВА

РЕШЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

Учебно-методическое пособие для подготовки к ЕГЭ по математике

Начнем с решения простых задач.

Пример 1. Решить неравенство

$$\left(x-1\right)\left(\log_2 x+1\right)>0 .$$

Решение. Напомним, что произведение двух чисел (скобки в левой части неравенства) положительно тогда и только тогда, когда оба этих числа имеют один и тот же знак, и заметим, что областью определения неравенства является множество $x>0$. Следовательно,

$$\left(x-1\right)\left(\log_2 x+1\right)>0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x-1>0 \\ \log_2 x+1>0 \\ x>0 \end{array}\right. \cup \left\{\begin{array}{c} x-1<0 \\ \log_2 x+1<0 \\ x>0 \end{array}\right.$$

Решим первую систему неравенств:

$$\begin{cases} x-1>0 \\ \log_2 x+1>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ \log_2 x>-1 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>\dfrac{1}{2} \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \{x>1\}$$

Теперь решим вторую систему неравенств:

$$\begin{cases} x-1<0 \\ \log_2 x+1<0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1 \\ \log_2 x<-1 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1 \\ x<\dfrac{1}{2} \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left\{0<x<\frac{1}{2}\right\}$$

Ответ: $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$.

Пример 2. Решить неравенство

$$\log_3\left(3^x+1\right)+x>2+\log_3 10.$$

Решение.

$$\log_3\left(3^x+1\right)+x>2+\log_3 10 \Leftrightarrow \log_3\left(3^x+1\right)+\log_3\left(3^x\right)>\log_3 9+\log_3 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3\left[3^x\cdot\left(3^x+1\right)\right]>\log_3 90 \Leftrightarrow \left(3^x\right)^2+3^x-90>0.$$

Для решения неравенства

$$\left(3^x\right)^2+3^x-90>0$$

совершим замену переменного

$$3^x=y$$

и найдем корни квадратного уравнения

$$y^2+y-90=0:$$

$$y^2+y-90=0 \Leftrightarrow y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+360}}{2}=\frac{-1\pm 19}{2} \Leftrightarrow y_1=-10,\ y_2=9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2+y-90=(y+10)(y-9).$$

Следовательно,

$$\left(3^x\right)^2+3^x-90>0 \Leftrightarrow \left(3^x+10\right)\left(3^x-9\right)>0 \Leftrightarrow \left(3^x-9\right)>0 \Leftrightarrow 3^x>9 \Leftrightarrow x>2.$$

Ответ: $x\in(2,+\infty)$.

Пример 3. Решить неравенство

$$1+2x<\log_7\left(1+6\cdot 7^x\right).$$

Решение.

$$1+2x<\log_7\left(1+6\cdot 7^x\right)\Leftrightarrow \log_7 7^{2x+1}<\log_7\left(1+6\cdot 7^x\right)\Leftrightarrow 7^{2x+1}<1+6\cdot 7^x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 7\cdot 7^{2x}-6\cdot 7^x-1<0.$$

Для решения неравенства

$$7\cdot 7^{2x}-6\cdot 7^x-1<0$$

совершим замену переменного

$$7^x=y$$

и найдем корни квадратного уравнения

$$7y^2-6y-1=0:$$

$$7y^2-6y-1=0\Leftrightarrow y_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36+28}}{14}=\frac{6\pm 8}{14}\Leftrightarrow y_1=-\frac{2}{14}=-\frac{1}{7},\ y_2=1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 7y^2-6y-1=7\left(y+\frac{1}{7}\right)(y-1).$$

Следовательно,

$$7\cdot 7^{2x}-6\cdot 7^x-1<0\Leftrightarrow 7\left(7^x+\frac{1}{7}\right)\left(7^x-1\right)<0\Leftrightarrow\left(7^x-1\right)<0\Leftrightarrow 7^x<1\Leftrightarrow x<0.$$

Ответ: $x\in\left(-\infty,0\right)$.

Пример 4. Решить неравенство

$$\log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}x\right)<0.$$

Решение.

$$\log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}x\right)<0\Leftrightarrow 0<\log_{\frac{1}{3}}x<1\Leftrightarrow 0<-\log_3 x<1\Leftrightarrow 0>\log_3 x>-1\Leftrightarrow 1>x>\frac{1}{3}.$$

Ответ: $x\in\left(\frac{1}{3},1\right)$.

Пример 5. Решить неравенство

$$\log_5\left(\frac{3}{x-1}\right)>0 .$$

Решение.

$$\log_5\left(\frac{3}{x-1}\right)>0 \Leftrightarrow \frac{3}{x-1}>1 \Leftrightarrow \frac{3}{x-1}-1>0 \Leftrightarrow \frac{4-x}{x-1}>0 \Leftrightarrow \frac{x-4}{x-1}<0.$$

Решая последнее неравенство с помощью метода интервалов, получаем ответ задачи.

Ответ: $x\in(1,4)$.

Пример 6. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{2x+3}}{\log_2\left(x^2-3x+3\right)}\ge 0 . \qquad (1)$$

Решение. Найдем сначала область определения неравенства.

Во-первых, число, стоящее под знаком квадратного корня, должно быть неотрицательным, т.е. должно выполняться неравенство

$$2x+3\ge 0 \Leftrightarrow x\ge -\frac{3}{2}. \qquad (2)$$

Во-вторых, число, стоящее под знаком логарифма, должно быть положительным, т. е. должно выполняться неравенство

$$x^2-3x+3>0 . \qquad (3)$$

Для решения неравенства (3) вычислим дискриминант квадратного трехчлена, стоящего в его левой части:

$$D=b^2-4ac=9-12=-3<0.$$

Поскольку дискриминант отрицателен, а ветви параболы направлены вверх, то неравенство (3) выполняется при всех значениях x.

В третьих, знаменатель дроби, стоящей в левой части неравенства (1), не должен обращаться в нуль, т.е. должно выполняться неравенство

$$x^2-3x+3\ne 1 \Leftrightarrow x^2-3x+2\ne 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1)\ne 0 \Leftrightarrow x\ne 2,\ x\ne 1.$$

Следовательно, область определения неравенства (1) имеет вид:

$$x \in \left[-\frac{3}{2}, 1 \right) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty). \qquad (4)$$

Рассмотрим теперь область

$$x \in \left(-\frac{3}{2}, 1 \right) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty). \qquad (5)$$

В области (5) числитель дроби из левой части неравенства (1) положителен, откуда вытекает, что для выполнимости неравенства (1) требуется, чтобы и знаменатель дроби был положительным, т.е. должно выполняться неравенство

$$\log_2 \left(x^2 - 3x + 3 \right) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 3 > 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty).$$

Отсюда, принимая во внимание формулу (5), вытекает, что должно выполняться соотношение

$$x \in \left(-\frac{3}{2}, 1 \right) \cup (2, +\infty). \qquad (6)$$

Чтобы получить ответ задачи, к множеству (6) осталось добавить точку $x = -\frac{3}{2}$, в которой числитель дроби из левой части неравенства (1) обращается в нуль, и неравенство превращается в равенство. Эта точка входит в область (4).

Ответ: $x \in \left[-\frac{3}{2}, 1 \right) \cup (2, +\infty)$

Пример 7. Решить неравенство

$$\frac{\log_2^2 (x+3)}{x^2 - 4x - 5} \ge 0. \qquad (7)$$

Решение. Поскольку числитель дроби из левой части неравенства (7) неотрицателен, то выполняется соотношение

$$\frac{\log_2^2 (x+3)}{x^2 - 4x - 5} \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 (x+3) = 0 \\ x^2 - 4x - 5 \ne 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} \log_2 (x+3) \ne 0 \\ x^2 - 4x - 5 > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases}$$

Далее получаем

$$\begin{cases} \log_2(x+3)=0 \\ x^2-4x-5\neq 0 \\ x+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=1 \\ (x-5)(x+1)\neq 0 \\ x>-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x\neq -1,\ x\neq 5 \\ x>-3 \end{cases} \Leftrightarrow \{x=-2\}$$

Кроме того,

$$\begin{cases} \log_2(x+3)\neq 0 \\ x^2-4x-5>0 \\ x+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3\neq 1 \\ (x-5)(x+1)>0 \\ x>-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -2 \\ x\in(-\infty,-1)\cup(5,+\infty) \\ x>-3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{x\in(-3,-1)\cup(5,+\infty),\ x\neq -2\}$$

Объединяя два найденных множества, получаем ответ задачи.

Ответ: $x\in(-3,-1)\cup(5,+\infty)$

Пример 8. Решить неравенство

$$2+\log_{\frac{1}{2}} x<\log_2(5x+1).$$

Решение. Заметив, что область определения неравенства имеет вид $x>0$, проведем следующие преобразования:

$$2+\log_{\frac{1}{2}} x<\log_2(5x+1)\Leftrightarrow 2-\log_2 x<\log_2(5x+1)\Leftrightarrow 2<\log_2 x+\log_2(5x+1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2<\log_2\left[x(5x+1)\right]\Rightarrow 4<x(5x+1)\Rightarrow 5x^2+x-4>0.$$

Чтобы решить неравенство

$$5x^2+x-4>0, \qquad (8)$$

решим, сначала, соответствующее квадратное уравнение:

$$5x^2+x-4=0\Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+80}}{10}=\frac{-1\pm 9}{10}\Leftrightarrow x_1=-1,\ x_2=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}.$$

Следовательно, решением неравенства (8) является область

$$x\in(-\infty,-1)\cup\left(\frac{4}{5},+\infty\right).$$

Пересечение этого множества с множеством $x>0$ дает ответ задачи.

Ответ: $x\in\left(\frac{4}{5},+\infty\right)$.

Пример 9. Решить неравенство

$$x\cdot 3^{\log_{\frac{1}{9}}\left(16x^4-8x^2+1\right)}<\frac{1}{3}. \qquad (9)$$

Решение. Преобразуем, сначала, левую часть неравенства (9) к более простой форме:

$$x\cdot 3^{\log_{\frac{1}{9}}\left(16x^4-8x^2+1\right)}=x\cdot 3^{\log_{3^{-2}}\left[\left(4x^2-1\right)^2\right]}=x\cdot 3^{-\log_3\left|4x^2-1\right|}=\frac{x}{\left|4x^2-1\right|}$$

В результате неравенство (9) принимает следующий вид:

$$\frac{x}{\left|4x^2-1\right|}<\frac{1}{3}, \qquad (10)$$

а его областью определения является множество

$$x\neq-\frac{1}{2},\ x\neq\frac{1}{2}. \qquad (11)$$

На множестве (11) неравенство (10) можно переписать в форме

$$3x<\left|4x^2-1\right|, \qquad (12)$$

и приступить к раскрытию модуля, стоящего в правой части неравенства (12), предварительно, заметив, что для значений

$$x\leq 0,\ x\neq-\frac{1}{2}$$

неравенство (10) выполняется (левая часть меньше или равна нулю, а правая — больше нуля).

В области

$$x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$$

выражение, стоящее под знаком модуля, положительно, и неравенство (12) решается так:

$$3x < \left|4x^2 - 1\right| \Leftrightarrow 3x < 4x^2 - 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 3x - 1 > 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{8} = \frac{3 \pm 5}{8},\ x_1 = -\frac{1}{4},\ x_2 = 1;$$

$$4x^2 - 3x - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right) \cup (1, +\infty) \Rightarrow x \in (1, +\infty)$$

В области

$$x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

выражение, стоящее под знаком модуля отрицательно, и неравенство (12) решается так:

$$3x < \left|4x^2 - 1\right| \Leftrightarrow 3x < 1 - 4x^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 3x - 1 < 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{8} = \frac{-3 \pm 5}{8},\ x_1 = -1,\ x_2 = \frac{1}{4};$$

$$4x^2 + 3x - 1 < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-1, \frac{1}{4}\right) \Rightarrow x \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$$

Объединяя два случая раскрытия модуля, получаем ответ задачи

Ответ: $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \cup (1, +\infty).$

Пример 10. Решить неравенство

$$\log_{3x+\frac{7}{2}}\left(4x^2 + 4x + 2\right) \le 1. \qquad (13)$$

Решение. Заметим, сначала, что дискриминант квадратного трехчлена, стоящего под знаком логарифма в неравенстве (13), отрицателен, а поскольку ветви параболы направлены вверх, то квадратный трехчлен принимает только положительные значения, и можно рассмотреть два случая:

Случай 1.

$$3x + \frac{7}{2} > 1 \Leftrightarrow x > -\frac{5}{6}.$$

В этом случае

$$\log_{3x+\frac{7}{2}}\left(4x^2+4x+2\right)\le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{5}{6} \\ 4x^2+4x+2\le 3x+\dfrac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{5}{6} \\ 4x^2+x-\dfrac{3}{2}\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{5}{6} \\ 8x^2+2x-3\le 0 \end{cases}$$

Далее получаем

$$8x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+96}}{16}=\frac{-2\pm 10}{16} \Leftrightarrow x_1=-\frac{3}{4},\ x_2=\frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x>-\dfrac{5}{6} \\ 8x^2+2x-3\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{5}{6} \\ x\in\left[-\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left[-\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right].$$

<u>Случай 2.</u>

$$0<3x+\frac{7}{2}<1 \Leftrightarrow -\frac{7}{6}<x<-\frac{5}{6}$$

В этом случае

$$\log_{3x+\frac{7}{2}}\left(4x^2+4x+2\right)\le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{7}{6}<x<-\dfrac{5}{6} \\ 4x^2+4x+2\ge 3x+\dfrac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{7}{6}<x<-\dfrac{5}{6} \\ 4x^2+x-\dfrac{3}{2}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{7}{6}<x<-\dfrac{5}{6} \\ 8x^2+2x-3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{7}{6}<x<-\dfrac{5}{6} \\ x\in\left(-\infty,-\dfrac{3}{4}\right]\cup\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(-\frac{7}{6},-\frac{5}{6}\right)$$

Объединение результатов, полученных при исследовании случаев 1 и 2, дает ответ задачи.

Ответ: $x\in\left(-\dfrac{7}{6},-\dfrac{5}{6}\right)\cup\left[-\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{2}\right]$.

Пример 11. Решить неравенство

$$\log_{-2x^2-3x}\left(\frac{5+2^{\frac{3}{4}+x}}{6}\right)>0$$

Решение. Сначала решим следующее уравнение

$$-2x^2-3x=1 \Leftrightarrow 2x^2+3x+1=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\frac{-3\pm1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1=-1,\ x_2=-\frac{1}{2}$$

Теперь рассмотрим два случая.

Случай 1.

$$-2x^2-3x>1 \Leftrightarrow 2x^2+3x+1<0 \Leftrightarrow x\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$$

В этом случае

$$\log_{-2x^2-3x}\left(\frac{5+2^{\frac{3}{4}+x}}{6}\right)>0 \Rightarrow \frac{5+2^{\frac{3}{4}+x}}{6}>1 \Leftrightarrow 2^{\frac{3}{4}+x}>1 \Leftrightarrow \frac{3}{4}+x>0 \Leftrightarrow x>-\frac{3}{4}.$$

Следовательно, выполняется неравенство

$$x\in\left(-\frac{3}{4},-\frac{1}{2}\right).$$

Случай 2.

$$\begin{cases}-2x^2-3x<1\\-2x^2-3x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x^2+3x+1>0\\2x^2+3x<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in(-\infty,-1)\cup\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)\\x\in\left(-\frac{3}{2},0\right)\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{3}{2},-1\right)\cup\left(-\frac{1}{2},0\right)$$

В этом случае

$$\log_{-2x^2-3x}\left(\frac{5+2^{\frac{3}{4}+x}}{6}\right)>0 \Rightarrow \frac{5+2^{\frac{3}{4}+x}}{6}<1 \Leftrightarrow 2^{\frac{3}{4}+x}<1 \Leftrightarrow \frac{3}{4}+x<0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-\frac{3}{4}\right)$$

Следовательно, выполняется неравенство

$$x \in \left(-\frac{3}{2}, -1\right).$$

Объединение результатов, полученных при исследовании случаев 1 и 2, дает ответ задачи.

Ответ: $x \in \left(-\frac{3}{2}, -1\right) \cup \left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right).$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить неравенства:

1. $(x-3)\log_{\frac{1}{2}} x < 0$
2. $(x-4)\left(\log_{\frac{1}{4}} x - 1\right) < 0$
3. $(x-5)\log_{\frac{1}{3}} x > 0$
4. $x(\log_3 x + 2) > 0$
5. $(x-4)\left(\log_{\frac{1}{4}} x - 1\right) < 0$
6. $4 - x < \log_2(6 + 2^x)$
7. $\log_4(4^x + 2) + x > 2 + \log_4 5$
8. $3 - x > \log_5(20 + 5^x)$
9. $\log_6(6^{x+1} + 11) + x > \log_6 2$
10. $\log_8(8^x + 2) < 1 - x$
11. $\log_9(9^x + 3) + x > 1 + \log_9 2$

12. $\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_5 x\right) > 0$

13. $\log_3\left(\dfrac{2}{x+2}\right) > 0$

14. $\dfrac{\sqrt{x+5}}{\log_4\left(x^2-3x-3\right)} \ge 0$

15. $\dfrac{\log_5^2\left(x+3\right)}{x^2-2x-3} \ge 0$

16. $\log_3\left(x-1\right) \ge 2+\log_{\frac{1}{3}}\left(x+7\right)$

17. $\log_2 x < 1-2\log_4\left(x-1\right)$

18. $1+\log_{\frac{1}{10}}\left(1+x\right) < \lg\left(x-2\right)$

19. $2^{\log_4\left(25x^4-10x^2+1\right)} > 4x$

20. $x\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_4\left(\frac{4}{x^2}-4+x^2\right)} \le 2$

21. $5^{\log_{25}\left(36x^4-12x^2+1\right)} > 5x$

22. $x\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^{\log_{36}\left(\frac{1}{x^2}-2+x^2\right)} \le 4$

23. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\log_9\left(\frac{1}{x^2}-6+9x^2\right)} \ge \dfrac{1}{x}$

24. $\log_{4x+4}\left(5x^2+5x+\dfrac{9}{4}\right) \le 1$

25. $\log_{-4x^2+5x}\left(\dfrac{1+3^{\frac{1}{2}-x}}{6}\right) > 0$

26. $\log_{x+\frac{7}{4}}\left(2x^2-x+\dfrac{9}{8}\right) \le 1$

27. $\log_{-5x^2-6x}\left(\dfrac{3+4^{\frac{1}{3}+x}}{4}\right)>0$

28. $\log_{\frac{7}{6}-x}\left(6x^2-2x+\dfrac{1}{6}\right)\le 1$

29. $\log_{-12x^2+8x}\left(\dfrac{2+5^{\frac{1}{4}-x}}{3}\right)>0$