# Учебный центр «Резольвента»

**Кандидат физико-математических наук, доцент**

**С. С. САМАРОВА**

# РЕШЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

**Учебно-методическое пособие**

**для подготовки к ЕГЭ по математике**



**Пример 1.** Решить уравнение

$$\log_2(x+1)+\log_2 x=1.$$

**Решение.**

$$\log_2(x+1)+\log_2 x=1 \Rightarrow \log_2 x(x+1)=1 \Rightarrow x(x+1)=2 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow x_1=-2,\ x_2=1.$$

Поскольку под знаком логарифма не может быть отрицательного числа, то случай $x_1=-2$ должен быть отброшен.

Простая проверка показывает, что значение $x_2=1$ удовлетворяет исходному уравнению.

**Ответ:** 1.

**Пример 2.** Решить уравнение

$$\log_{x-1} 9 = 2$$

**Решение.**

$$\log_{x-1} 9 = 2 \Rightarrow (x-1)^2 = 9 \Rightarrow (x-1)_1 = -3, (x-1)_2 = 3.$$

Поскольку основание логарифмов не может быть отрицательным числом, то первый случай должен быть отброшен. Далее получаем:

$$x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 4 .$$

Простая проверка показывает, что число $x = 4$ является корнем исходного уравнения.

**Ответ: 4.**

**Пример 3.** Решить уравнение

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-3) + \log_3 \sqrt{3x+1} = 0$$

**Решение.**

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-3) + \log_3 \sqrt{3x+1} = 0 \Leftrightarrow -\log_3(x-3) + \log_3 \sqrt{3x+1} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_3 \sqrt{3x+1} = \log_3(x-3) \Rightarrow \sqrt{3x+1} = x-3 \Rightarrow 3x+1 = (x-3)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x+1 = x^2 - 6x + 9 \Rightarrow x^2 - 9x + 8 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 8.$$

Число $x_1 = 1$ не входит в область определения уравнения, поскольку в этом случае число $x - 3$, стоящее под знаком логарифма, будет отрицательным.

Простая проверка показывает, что число $x = 8$ является корнем исходного уравнения.

**Ответ:** 8.

**Пример 4.** Решить уравнение

$$\log_x 10 + \log_{x^4} 100 = 6$$

**Решение.**

$$\log_x 10 + \log_{x^4} 100 = 6 \Leftrightarrow \log_x 10 + \frac{2}{4}\log_x 10 = 6 \Leftrightarrow \log_x 10 + \frac{1}{2}\log_x 10 = 6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\log_x 10 = 6 \Leftrightarrow \log_x 10 = 4 \Rightarrow x^4 = 10 \Rightarrow x_1 = -\sqrt[4]{10}, x_2 = \sqrt[4]{10}.$$

Поскольку основание логарифмов не может быть отрицательным числом, то первый случай должен быть отброшен.

Простая проверка показывает, что число $x=\sqrt[4]{10}$ является корнем исходного уравнения.

**Ответ:** $\sqrt[4]{10}$.

**Пример 5.** Решить уравнение

$$\log_4(x+12)\cdot\log_x 2=1$$

**Решение.**

$$\log_4(x+12)\cdot\log_x 2=1\Rightarrow\log_{2^2}(x+12)\cdot\frac{1}{\log_2 x}=1\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot\frac{\log_2(x+12)}{\log_2 x}=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\log_2(x+12)}{\log_2 x}=2\Rightarrow\log_x(x+12)=2\Rightarrow x^2=x+12\Rightarrow x^2-x-12=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(x-4)(x+3)=0\Rightarrow x_1=-3,\ x_2=4.$$

Поскольку основание логарифмов не может быть отрицательным числом, то первый случай должен быть отброшен.

Простая проверка показывает, что число $x=4$ является корнем исходного уравнения.

**Ответ:** 4.

**Пример 6.** Решить уравнение

$$\log_3\sqrt{x}+\frac{3}{2}=\log_x\left(\frac{1}{3}\right).$$

**Решение.**

$$\log_3\sqrt{x}+\frac{3}{2}=\log_x\left(\frac{1}{3}\right)\Rightarrow\frac{1}{2}\log_3 x+\frac{3}{2}=-\log_x 3\Rightarrow\frac{1}{2}\log_3 x+\frac{3}{2}=-\frac{1}{\log_3 x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\log_3 x+3=-\frac{2}{\log_3 x}\Rightarrow\log_3 x+3+\frac{2}{\log_3 x}=0\Rightarrow\frac{(\log_3 x)^2+3\log_3 x+2}{\log_3 x}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(\log_3 x)^2+3\log_3 x+2=0,\ \log_3 x\neq 0\Rightarrow(\log_3 x)_1=-2,(\log_3 x)_2=-1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1=3^{-2}=\frac{1}{9},\ x_2=3^{-1}=\frac{1}{3}.$$

Поскольку область определения уравнения имеет вид:

$$x > 0,\ x \neq 1,$$

то оба найденных значения в неё входят, и, следовательно, являются корнями исходного уравнения.

**Ответ:** $\frac{1}{9}; \frac{1}{3}.$

**Пример 7.** Решить уравнение

$$\log_6 x^2 - \log_x \frac{1}{6} = 3.$$

**Решение.**

$$\log_6 x^2 - \log_x \frac{1}{6} = 3 \Rightarrow 2\log_6 x + \log_x 6 = 3 \Rightarrow 2\log_6 x + \frac{1}{\log_6 x} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\log_6 x + \frac{1}{\log_6 x} - 3 = 0 \Rightarrow \frac{2(\log_6 x)^2 - 3\log_6 x + 1}{\log_6 x} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(\log_6 x)^2 - 3\log_6 x + 1 = 0,\ \log_6 x \neq 0 \Rightarrow (\log_6 x)_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_6 x)_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{4} \Rightarrow (\log_6 x)_1 = \frac{1}{2},\ (\log_6 x)_2 = 1 \Rightarrow x_1 = \sqrt{6},\ x_2 = 6.$$

Проверка показывает, что оба найденных значения являются корнями исходного уравнения.

**Ответ:** $\sqrt{6}; 6.$

**Пример 8.** Решить уравнение

$$\lg\left(19 + 2 \cdot 10^x\right) = 1 - x.$$

**Решение.**

$$\lg\left(19 + 2 \cdot 10^x\right) = 1 - x \Leftrightarrow 19 + 2 \cdot 10^x = 10^{1-x} \Leftrightarrow 19 + 2 \cdot 10^x = \frac{10}{10^x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \left(10^x\right)^2 + 19 \cdot 10^x - 10 = 0 \Leftrightarrow \left(10^x\right)_{1,2} = \frac{-19 \pm \sqrt{361+80}}{4} = \frac{-19 \pm 21}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(10^x\right)_1 = -10,\ \left(10^x\right)_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Уравнение

$$10^x = -10$$

решений не имеет.

Решением уравнения

$$10^x = \frac{1}{2}$$

является число $x = \lg\left(\frac{1}{2}\right) = -\lg 2.$

**Ответ:** $-\lg 2.$

**Пример 9.** Решить уравнение

$$\log_7\left(9^x - 25\right) = \frac{3}{\log_2 7} + \log_7\left(3^x + 5\right).$$

**Решение.**

$$\log_7\left(9^x - 25\right) = \frac{3}{\log_2 7} + \log_7\left(3^x + 5\right) \Leftrightarrow \log_7\left(9^x - 25\right) = 3\log_7 2 + \log_7\left(3^x + 5\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_7\left(9^x - 25\right) = \log_7 8 + \log_7\left(3^x + 5\right) \Leftrightarrow \log_7\left(9^x - 25\right) = \log_7\left[8\cdot\left(3^x + 5\right)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9^x - 25 = 8\cdot\left(3^x + 5\right) \Leftrightarrow \left(3^x\right)^2 - 8\cdot 3^x - 65 = 0 \Leftrightarrow \left(3^x\right)_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 260}}{2} =$$

$$= \frac{8 \pm 18}{2} \Leftrightarrow \left(3^x\right)_1 = -5,\ \left(3^x\right)_2 = 13.$$

Уравнение

$$3^x = -5$$

решений не имеет.

Решением уравнения

$$3^x = 13$$

является число $x = \log_3 13.$

**Ответ:** $\log_3 13.$

**Пример 10.** Решить уравнение

$$1 + \log_7\left(\frac{x-1}{3x-6}\right) = \log_{\frac{1}{7}}\left(\frac{x-2}{7}\right).$$

**Решение.**

$$1+\log_7\left(\frac{x-1}{3x-6}\right)=\log_{\frac{1}{7}}\left(\frac{x-2}{7}\right)\Leftrightarrow 1+\log_7\left[\frac{x-1}{3(x-2)}\right]=-\log_7\left(\frac{x-2}{7}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+\log_7\left[\frac{x-1}{3(x-2)}\right]=-\log_7(x-2)+\log_7 7\Leftrightarrow \log_7\left[\frac{x-1}{3(x-2)}\right]=-\log_7(x-2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_7\left[\frac{x-1}{3(x-2)}\right]=\log_7\frac{1}{x-2}\Rightarrow \frac{x-1}{3(x-2)}=\frac{1}{x-2}\Rightarrow \frac{x-1}{x-2}=\frac{3}{x-2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-4}{x-2}=0\Rightarrow x=4.$$

Проверка показывает, что число $x=4$ является корнем исходного уравнения.

**Ответ:** 4.

**Пример 11.** Решить уравнение

$$1+\log_6\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{6}\right)=\log_{\frac{1}{6}}\left(\frac{x+1}{3-x}\right).$$

**Решение.**

$$1+\log_6\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{6}\right)=\log_{\frac{1}{6}}\left(\frac{x+1}{3-x}\right)\Leftrightarrow \log_6 6+\log_6\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{6}\right)=-\log_6\left(\frac{x+1}{3-x}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_6\left[6\cdot\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{6}\right)\right]=\log_6\left(\frac{3-x}{x+1}\right)\Rightarrow 6\cdot\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{6}\right)=\frac{3-x}{x+1}\Rightarrow 2x-1=\frac{3-x}{x+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(2x-1)(x+1)-(3-x)}{x+1}=0\Rightarrow \frac{2x^2-x+2x-1-3+x}{x+1}=0\Rightarrow \frac{2x^2+2x-4}{x+1}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+x-2}{x+1}=0\Rightarrow \frac{(x+2)(x-1)}{x+1}=0\Rightarrow x_1=-2,\ x_2=1.$$

В случае $x=-2$ выражения, стоящие под знаком логарифмов, становятся отрицательными, поэтому это значение должно быть отброшено.

Простая проверка показывает, что число $x=1$ является корнем исходного уравнения.

**Ответ:** 1.

**Пример 12.** Решить уравнение

$$2\log_{4x}x^3=5\log_{2x}x.$$

**Решение.**

$$2\log_{4x} x^3 = 5\log_{2x} x \Rightarrow 6\log_{4x} x - 5\log_{2x} x = 0 \Rightarrow \frac{6\log_2 x}{\log_2(4x)} - \frac{5\log_2 x}{\log_2(2x)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 x \cdot \left[\frac{6}{\log_2(4x)} - \frac{5}{\log_2(2x)}\right] = 0 \Rightarrow \log_2 x = 0 \cup \frac{6}{\log_2(4x)} - \frac{5}{\log_2(2x)} = 0$$

Решением уравнения

$$\log_2 x = 0$$

является число $x = 1$.

Остаётся решить второе уравнение:

$$\frac{6}{\log_2(4x)} - \frac{5}{\log_2(2x)} = 0 \Rightarrow \frac{6}{\log_2(4x)} = \frac{5}{\log_2(2x)} \Rightarrow 6\log_2(2x) = 5\log_2(4x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6(\log_2 2 + \log_2 x) = 5(\log_2 4 + \log_2 x) \Rightarrow 6(1 + \log_2 x) = 5(2 + \log_2 x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 + 6\log_2 x = 10 + 5\log_2 x \Rightarrow \log_2 x = 4 \Rightarrow x = 16.$$

Проверка показывает, что оба найденных значения являются корнями исходного уравнения.

**Ответ:** $1; 16.$

**Пример 13.** Решить уравнение

$$\sqrt{\log_{\sqrt{x}}(5x)} \cdot \log_5 x = -2$$

**Решение.**

$$\sqrt{\log_{\sqrt{x}}(5x)} \cdot \log_5 x = -2 \Leftrightarrow \sqrt{2\log_x(5x)} \cdot \log_5 x = -2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2\log_5(5x)}{\log_5 x}} \cdot \log_5 x = -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{2\log_5 5 + 2\log_5 x}{\log_5 x}} \cdot \log_5 x = -2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2 + 2\log_5 x}{\log_5 x}} \cdot \log_5 x = -2$$

Совершим теперь в полученном уравнении замену переменного

$$\log_5 x = y$$

и заметим, что выполняется неравенство

$$y < 0.$$

В результате уравнение

$$\sqrt{\frac{2+2\log_5 x}{\log_5 x}}\cdot\log_5 x=-2$$

примет вид:

$$\sqrt{\frac{2+2y}{y}}\cdot y=-2\Rightarrow\frac{2+2y}{y}\cdot y^2=4\Rightarrow 2y^2+2y-4=0\Rightarrow y^2+y-2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}\Rightarrow y_1=-2,\ \ y_2=1.$$

В силу того, что $y<0$, второй случай должен быть отброшен.

В первом случае получаем:

$$\log_5 x=-2\Rightarrow x=\frac{1}{25}.$$

Проверка показывает, что найденное значение удовлетворяет исходному уравнению.

**Ответ:** $\frac{1}{25}$.

## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**Решить уравнения:**

1. $\log_3 x+\log_3\left(2x+\frac{1}{3}\right)=-1$
2. $\log_5 x+\log_5\left(x+\frac{4}{5}\right)=-1$
3. $\log_2 x+\log_2(x+2)=3$
4. $\log_{x+1}4=2$
5. $\log_{x-2}25=2$
6. $\log_{x+2}16=2$
7. $2\log_9(3x-1)=\log_3\sqrt{x+3}$
8. $3\log_8(x-2)=\log_2\sqrt{2x-1}$

9. $\log_{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{2}\right)+\log_2\sqrt{2-\frac{x}{4}}=0$

10. $\log_x 12-\log_{x^3} 27=2$

11. $\log_{2x}(1-x)=2-\log_{4x^2}\left(\frac{1}{9}\right)$

12. $\log_x 7+\log_{x^4} 49=3$

13. $2\log_{x^2}(4+x)+\log_x 2=2$

14. $\log_{\sqrt[3]{x}} 2-\log_x 18=2$

15. $2\log_{x^2}(3+x)=2+\log_x 2$

16. $\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{x^2}\right)-\log_x 5=1$

17. $4\log_{\frac{1}{4}} x=4-\log_x 64$

18. $2\log_x \frac{1}{7}+\log_7\left(\frac{1}{x}\right)=-3$

19. $-\log_x 64-6\log_8\sqrt{x}=7$

20. $\log_9 x^2+5=\log_x \frac{1}{81}$

21. $\log_2\sqrt{x}-\log_x 4=\frac{3}{2}$

22. $\log_3\left(11+4\cdot 3^{-x}\right)=1+x$

23. $\log_2\left(25^x-16\right)=\frac{1}{\log_7 2}+\log_2\left(5^x+4\right)$

24. $\log_5\left(14+24\cdot 5^x\right)=1-x$

25. $\log_5\left(49^x-1\right)-1=\frac{1}{\log_2 5}+\log_5\left(7^x+1\right)$

26. $\log_7\left(13+2\cdot 7^{-x}\right)=1+x$

27. $\lg\left(4^x-9\right)-\lg 5=\lg\left(2^x+3\right)+\lg 2$

28. $2\log_5 x - \log_5\left(x - \frac{3}{2}\right) = 2\log_{25}(2x+4)$

29. $\log_{\frac{1}{10}}\left(-\frac{x}{2}\right) = \lg(1-x) - 1$

30. $\log_3(x+1) + \log_3(x-3) = \frac{1}{\log_5 3}$

31. $1 + \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{4-x}{2}\right) = \log_5(1-x)$

32. $\log_3(-4+x) = 2\log_3 4 + \log_{\frac{1}{3}}(2+x)$

33. $\log_2(x-1) + \log_2(4-x) = 1 + 3\log_8(3x-5)$

34. $3\log_{3x} x = 2\log_{9x} x^2$

35. $1 + \log_x(3-x) = \log_7 4 \cdot \log_x 7$

36. $\left(\log_9(7-x) + 1\right) \cdot \log_{3-x} 3 = 1$

37. $1 + \log_x(4-x) = \log_5 3 \cdot \log_x 5$

38. $\left(\log_4(2x+9) + 1\right) \cdot \log_{x+2} 2 = 1$