

Учебный центр «Резольвента»

Кандидат физико-математических наук, доцент

С. С. САМАРОВА

РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Учебно-методическое пособие для подготовки к
ЕГЭ и ГИА по математике

© С. С. Самарова, 2010

© ООО «Резольвента», 2010

Пример 1. Решить уравнение

$$\frac{3}{x+2} - \frac{2x-1}{x+1} = \frac{2x+1}{x^2+3x+2}. \quad (1)$$

Решение. Разложим на множители квадратный трехчлен, стоящий в знаменателе дроби из правой части уравнения. Для этого сначала нужно найти корни квадратного трехчлена:

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x_1 = -2, x_2 = -1.$$

Следовательно,

$$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$$

и уравнение (1) принимает форму

$$\frac{3}{x+2} - \frac{2x-1}{x+1} = \frac{2x+1}{(x+1)(x+2)}. \quad (2)$$

Область допустимых значений (ОДЗ) уравнений (1) и (2) имеет вид:

$$\{x \neq -1, x \neq -2\}.$$

Умножая обе части уравнения (2) на выражение

$$(x+1)(x+2),$$

и, производя необходимые сокращения, получаем:

$$\begin{aligned} 3(x+1) - (2x-1)(x+2) = 2x+1 &\Leftrightarrow 3x+3 - (2x^2 - x + 4x - 2) = 2x+1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3x+3 - 2x^2 + x - 4x + 2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow -2x^2 - 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x_1 = -2, x_2 = 1. \end{aligned}$$

Корень $x_1 = -2$ не входит в ОДЗ и должен быть отброшен.

Ответ: 1.

Пример 2. Решить уравнение

$$\frac{x-3}{x^2+4x+9} + \frac{x^2+4x+9}{x-3} = -2 \quad (3)$$

Решение. В результате замены переменного

$$\frac{x-3}{x^2+4x+9} = y,$$

совершенной в уравнении (3), получаем:

$$\begin{aligned} y + \frac{1}{y} = -2 &\Rightarrow y^2 + 1 = -2y \Leftrightarrow y^2 + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (y+1)^2 = 0 \Leftrightarrow y = -1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{x^2+4x+9} = -1 &\Rightarrow x-3 = -(x^2+4x+9) \Leftrightarrow x^2+4x+9+x-3=0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2+5x+6=0 \Leftrightarrow x_1 = -3, x_2 = -2. \end{aligned}$$

Проверка показывает, что оба найденных значения удовлетворяют исходному уравнению (3).

Ответ: -3, -2.

Пример 3. Решить уравнение

$$2x^2 + 3x - 5\sqrt{2x^2 + 3x + 9} + 3 = 0 \quad (4)$$

Решение. Уравнение (4) проще всего решить при помощи замены переменного

$$\sqrt{2x^2 + 3x + 9} = y. \quad (5)$$

В этом случае

$$2x^2 + 3x + 9 = y^2$$

и уравнение (3) принимает вид

$$\begin{aligned} y^2 - 9 - 5y + 3 = 0 &\Leftrightarrow y^2 - 5y - 6 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 7}{2} &\Leftrightarrow y_1 = -1, y_2 = 6. \end{aligned}$$

В силу того, что переменная y , определенная по формуле (5), является неотрицательным числом, значение $y_1 = -1$ должно быть отброшено. Следовательно,

$$\begin{aligned} y = 6 &\Rightarrow 2x^2 + 3x + 9 = y^2 = 36 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 9 - 36 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 27 = 0 &\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-3 \pm 15}{4} \Leftrightarrow x_1 = -\frac{18}{4} = -\frac{9}{2}, x_2 = 3. \end{aligned}$$

Ответ: $-\frac{9}{2}, 3$.

Пример 4. Решить уравнение

$$\frac{x}{1-x} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{1-x}} = 1 \quad (5)$$

Решение. Уравнение (5) проще всего решить при помощи замены переменного

$$\sqrt{\frac{x}{1-x}} = y. \quad (6)$$

В этом случае

$$\frac{x}{1-x} = y^2$$

и уравнение (5) принимает вид

$$y^2 - \frac{3}{2}y - 1 = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 3y - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} \Leftrightarrow y_1 = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}, y_2 = 2.$$

В силу того, что переменная y , определенная по формуле (6), является неотрицательным числом, значение $y_1 = -\frac{1}{2}$ должно быть отброшено. Следовательно,

$$y = 2 \Rightarrow \frac{x}{1-x} = y^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = 4 \Rightarrow x = 4 - 4x \Leftrightarrow 5x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{5}.$$

Ответ: $\frac{4}{5}$.

Пример 5. Решить уравнение

$$(x+2)^2 + \frac{24}{x^2+4x} = 18 \quad (7)$$

Решение. Уравнение (7) проще всего решить при помощи замены переменного

$$x^2 + 4x = y. \quad (8)$$

В этом случае

$$(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4 = y + 4,$$

и уравнение (7) принимает вид

$$y + 4 + \frac{24}{y} = 18 \Leftrightarrow y + \frac{24}{y} - 14 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 14y + 24 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_{1,2} = \frac{14 \pm 10}{2} \Leftrightarrow y_1 = 2, y_2 = 12.$$

При $y_1 = 2$ из формулы (8) получаем

$$x^2 + 4x = 2 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{2} = -2 \pm \sqrt{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -2 - \sqrt{6}, x_2 = -2 + \sqrt{6}.$$

При $y_2 = 12$ из формулы (8) получаем

$$x^2 + 4x = 12 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow x_{3,4} = \frac{-4 \pm 8}{2} \Leftrightarrow x_3 = -6, x_4 = 2.$$

Ответ: $-2 - \sqrt{6}; -2 + \sqrt{6}; -6; 2$

Пример 6. Решить уравнение

$$\sqrt{5-x} = x-3 \quad (9)$$

Решение. Заметив, предварительно, что правая часть уравнения (9) должна быть неотрицательным числом и ОДЗ уравнения имеет вид:

$$x \geq 3, \quad (10)$$

возведем обе части уравнения в квадрат:

$$\begin{aligned} \sqrt{5-x} = x-3 &\Rightarrow 5-x = x^2 - 6x + 9 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 4. \end{aligned}$$

В силу (10) случай $x_1 = 1$ должен быть отброшен. Простая проверка показывает, что значение $x_2 = 4$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: 4.

Пример 7. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{x+5}{3x-1}} = \sqrt{x+2} \quad (11)$$

Решение. Заметив, предварительно, что оба подкоренных выражения в уравнении (9) должны быть неотрицательными числами, возведем обе части уравнения в квадрат:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{x+5}{3x-1}} = \sqrt{x+2} &\Rightarrow \frac{x+5}{3x-1} = x+2 \Rightarrow x+5 = (x+2)(3x-1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x+5 &= 3x^2 + 6x - x - 2 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x - 7 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm 10}{6} \Leftrightarrow x_1 = -\frac{7}{3}, x_2 = 1. \end{aligned}$$

Значение $x_1 = -\frac{7}{3}$ должно быть отброшено, поскольку в этом случае подкоренное выражение из правой части уравнения (11) отрицательно. Простая проверка показывает, что значение $x_2 = 1$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: 1.

Пример 8. Решить уравнение

$$2x + \sqrt{\frac{7x^2 + x}{x+1}} = 0. \quad (12)$$

Решение. Переписывая уравнение (12) в виде

$$\sqrt{\frac{7x^2 + x}{x+1}} = -2x, \quad (13)$$

заметим, что правая часть уравнения (13) должна быть неотрицательной, т.е. должно выполняться неравенство

$$-2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0. \quad (14)$$

Также, в силу запрета деления на нуль, должно выполняться соотношение

$$x \neq -1. \quad (15)$$

Для того, чтобы найти корни уравнения (13), возведем обе его части в квадрат:

$$\begin{aligned} \frac{7x^2 + x}{x+1} = 4x^2 &\Rightarrow 7x^2 + x = 4x^2(x+1) \Leftrightarrow 4x^2(x+1) - 7x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x[4x(x+1) - 7x - 1] = 0 \Leftrightarrow x[4x^2 + 4x - 7x - 1] = 0 \Leftrightarrow x(4x^2 - 3x - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 0 \cup 4x^2 - 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_{2,3} = \frac{3 \pm 5}{8} \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = -\frac{1}{4}, x_3 = 1. \end{aligned}$$

В соответствии с (14) значение $x_3 = 1$ должно быть отброшено. Простая проверка показывает, что значения $x_1 = 0, x_2 = -\frac{1}{4}$ являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $0; -\frac{1}{4}$.

Пример 9. Решить уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{3}. \quad (16)$$

Решение. В результате замены переменного

$$\sqrt{x} = y, \quad y \geq 0, \quad (17)$$

совершенной в уравнении (16), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y-2} - \frac{1}{y} = \frac{2}{3} &\Leftrightarrow \frac{3y-3(y-2)-2y(y-2)}{3y(y-2)} = 0 \Rightarrow 3y-3(y-2)-2y(y-2) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3y-3y+6-2y^2+4y = 0 \Leftrightarrow -2y^2+4y+6 = 0 \Leftrightarrow y^2-2y-3 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Leftrightarrow y_1 = -1, y_2 = 3. \end{aligned}$$

В силу (17) значение $y_1 = -1$ должно быть отброшено. Для значения $y_2 = 3$ получаем:

$$\sqrt{x} = 3, \quad x = 9.$$

Простая проверка показывает, что найденное значение является корнем исходного уравнения.

Ответ: 9.

Пример 10. Решить уравнение

$$\sqrt{4 + x\sqrt{26 - x^2}} = x - 2. \quad (18)$$

Решение. Сначала заметим, что правая часть уравнения (18) должна быть неотрицательной, т.е. должно выполняться неравенство

$$x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2. \quad (19)$$

Теперь возведем обе части уравнения (18) в квадрат:

$$\begin{aligned} \sqrt{4 + x\sqrt{26 - x^2}} = x - 2 &\Rightarrow 4 + x\sqrt{26 - x^2} = (x - 2)^2 \Leftrightarrow 4 + x\sqrt{26 - x^2} = x^2 - 4x + 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x\sqrt{26 - x^2} = x^2 - 4x \Leftrightarrow x\sqrt{26 - x^2} - x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(\sqrt{26 - x^2} - x + 4) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x_1 = 0 \cup \sqrt{26 - x^2} - x + 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \cup \sqrt{26 - x^2} = x - 4. \end{aligned}$$

Остается решить уравнение

$$\sqrt{26 - x^2} = x - 4. \quad (20)$$

Правая часть уравнения (20) должна быть неотрицательной, т.е. должно выполняться неравенство

$$x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4. \quad (21)$$

Возводя обе части уравнения (20) в квадрат, получим:

$$\begin{aligned} \sqrt{26 - x^2} = x - 4 &\Rightarrow 26 - x^2 = x^2 - 8x + 16 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x - 10 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -1, x_3 = 5. \end{aligned}$$

Итак, мы нашли три значения:

$$x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 5.$$

В силу (19) и (21), значения x_1 и x_2 должны быть отброшены. Простая проверка показывает, что значение $x_3 = 5$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: 5.

Пример 11. Решить уравнение

$$\sqrt{3x+10} - \sqrt{x+2} = 2. \quad (22)$$

Решение. Возводя обе части уравнения (22) в квадрат, получим

$$\begin{aligned} \sqrt{3x+10} - \sqrt{x+2} = 2 &\Rightarrow 3x+10 - 2\sqrt{3x+10}\sqrt{x+2} + x+2 = 4 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 4x+8 = 2\sqrt{3x+10}\sqrt{x+2} \Rightarrow 2x+4 = \sqrt{3x+10}\sqrt{x+2}. \end{aligned}$$

Теперь возведем в квадрат обе части полученного уравнения:

$$\begin{aligned} 2x+4 = \sqrt{3x+10}\sqrt{x+2} &\Rightarrow (2x+4)^2 = (3x+10)(x+2) \Rightarrow \\ \Rightarrow 4x^2 + 16x + 16 = 3x^2 + 10x + 6x + 20 &\Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2. \end{aligned}$$

Проверка показывает, что оба найденных значения удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: -2; 2.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить уравнения:

- $1 + \frac{x-1}{x+2} + \frac{1}{x} = \frac{2+3x}{x(x+2)},$
- $2 + \frac{2t-1}{t+2} = \frac{4t+3}{2t+1},$
- $\frac{2y+1}{y-1} + \frac{y+1}{2y+1} = \frac{5y+4}{(y-1)(2y+1)},$

4. $\sqrt{12 - 2x + x^2} = x + 2,$

5. $\sqrt{-11 + 8x - x^2} = x - 3,$

6. $\sqrt{\frac{x+10}{x+1}} = \sqrt{5x-6},$

7. $x + \sqrt{\frac{x^2 + 8x}{x+3}} = 0,$

8. $\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}},$

9. $\frac{2}{x} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4-x}},$

10. $3x = \sqrt{x^3 + 8x^2 - 6x},$

11. $\frac{1-3x}{\sqrt{3x}} = \sqrt{x - \frac{1}{3}},$

12. $x + \sqrt{x^3 + 2x^2 - 12x} = 0,$

13. $\frac{3-4x}{\sqrt{x}} = \sqrt{8x-6},$

14. $x^2 - 24 - 2\sqrt{x^2 - 24} = 15,$

15. $13 - x^2 - 2\sqrt{13 - x^2} = 3,$

16. $x^2 - 21 - \sqrt{x^2 - 21} = 2,$

17. $10 - x^2 - \sqrt{10 - x^2} = 6,$

18. $\frac{3}{\sqrt{x+1}+1} + 2\sqrt{x+1} = 5,$

19. $\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{6},$

20. $\sqrt{2-x} + \frac{4}{\sqrt{2-x+3}} = 2,$

21. $\sqrt{2x + \sqrt{6x^2 + 1}} = x + 1,$

22. $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{3}{2},$

23. $3\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}} - \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} = 2,$

24. $\sqrt{4 + x\sqrt{9x^2 + 16}} = -x + 2,$

25. $2\sqrt{\frac{x+4}{1-2x}} - \sqrt{\frac{1-2x}{x+4}} = 1,$

26. $\sqrt{1+x\sqrt{2x^2-17}}=x-1,$

27. $\sqrt{\frac{2x+3}{x-2}}-3\sqrt{\frac{x-2}{2x+3}}=2,$

28. $x^2+4x+\frac{24}{x^2+4x}-17=0,$

29. $(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)-3=0,$

30. $x^2-3x-\frac{8}{x^2-3x}+2=0,$

31. $(x^2-6x)^2+14(x^2-6x)+45=0,$

32. $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12}.$